

# GDR\* SCIENCE GÉOMÉTRIE DE L'INFORMATION.

Michel Nguiffo Boyom<sup>†</sup>

## Trois questions pour comprendre. Quoi ? Pourquoi faire ? Comment ?

### Introduction

Ce document interne est destiné aux membres du GDR Science Géométrie de l'information. Son contenu est constitué des réponses aux questions d'âge de raison qui en forment le titre. Le texte survole les sujets du séminaire Léon Brillouin de février 2010 à IRCAM. Le style de texte est de type oral. Ce choix délibéré pour rendre ce texte accessible aux étudiants de Licence Mathématique. Grosso modo quatre thèmes sont abordés.

**Thème 1** : Variation sur la notion de structure de variété différentiable. Le texte en contient quatre dont l'efficacité dépend de type d'objet d'étude. Les connexions ont une présence envahissante dans les variétés statistiques et dans la géométrie de l'information. Pour ces raisons leurs propriétés essentielles sont discutées.

**Thème 2** : Homotopie et Revêtement.

On a choisi de décrire de façon explicite un revêtement universel dont le rôle en géométrie de l'information transite par la convexité de Koszul.

**Thème 3** : Algèbre homologique effective.

Le souci a été d'adoucir la violence de l'algèbre homologique. A titre d'illustration la notion de suite spectrale est rendue accessible à tout lecteur à l'aise avec l'algèbre linéaire de Licence.

**Thème 4** : Convexité de Koszul.

Ce thème éclaire les ponts entre la géométrie différentielle et la géométrie de l'information. C'est un thème unificateur entre divers courants de recherche en cours.

---

\*Ircam. Inria. Mines Paris. Paris 6. Polytechnique. Thalès. UM2...

<sup>†</sup>UMR CNRS 5149, I3M (Institut de Mathématiques et de modélisation), Université Montpellier 2, Montpellier, France. E-mail : boyom@math.univ-montp2.fr

# Une source de nouveaux invariants de la géométrie de l'information.

## 1 Structures différentiables. Difféomorphismes.

Atlas.

Paramétrisations.

Structures Fonctionnelles.

Algèbre Linéaire à Paramètre.

L'objet de cette section est une introduction aussi douce que possible à la géométrie différentielle élémentaire. Parmi les perspectives ad hoc j'ai choisi quatre qui occupent chacune une sous-section.

Les espaces topologiques considérés jouissent des propriétés suivantes. Ils sont connexes, connexes par arcs et localement connexes par arcs. Ils sont séparés Hausdorff et paracompacts. Les notions d'algèbre et de topologie nécessaires sont celles du niveau M1. L'aisance avec le calcul différentiel élémentaire est souhaitable.

### 1.1 ATLAS

Soit  $X$  un espace topologique et  $n \in \mathbb{N}$  un nombre entier non négatif.

**Définition 1.1** Une carte locale de dimension  $n$  de  $X$  est un couple  $(U, \varphi)$  où  $U$  est un ouvert de  $X$  appelé domaine de la carte et  $\varphi$  est un homéomorphisme de  $U$  sur un ouvert  $\Omega_U$  de  $\mathbb{R}^n$  appelé cordonnée locale.

Soient  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  des cartes locales de dimension  $n$  de  $X$  telles que  $U \cap V \neq \emptyset$ . Posons  $\Omega_{UV} = \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$  et  $\Omega_{VU} = \psi(V \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.2** Deux cartes locales  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  sont dites  $C^k$ -compatibles si l'une des propriétés suivantes est vérifiée

1.  $U \cap V = \emptyset$ .
2.  $\psi^{-1} \circ \varphi : \Omega_{UV} \rightarrow \Omega_{VU}$  est un difféomorphisme de classe  $C^k$ .

**Définition 1.3** Un atlas  $\mathcal{A}$  de dimension  $n$  de  $X$  indexé par un ensemble  $I$  est la donnée d'une famille  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  des cartes locales qui jouissent des propriétés suivantes

1.  $(U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $X$ .
2. Les cartes  $(U_i, \varphi_i)$  sont deux à deux compatibles.

**Définition 1.4** Une carte locale  $(U, \varphi)$  est compatible avec un atlas  $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  de classe  $C^k$  si  $(U, \varphi)$  est  $C^k$ -compatible avec chaque carte locale de  $\mathcal{A}$ .

**Définition 1.5** Un atlas  $\mathcal{A}$  de classe  $C^k$  est complet si toute carte  $C^k$ -compatible  $(U, \varphi)$  avec  $\mathcal{A}$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

## REMARQUES

1. La notion de compatibilité de deux atlas de même dimension et de même classe est évidente.
2. Si deux atlas  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$  de même dimension  $n$  et de même classe  $C^k$  sont compatibles alors leur réunion est un atlas de dimension  $n$  et de classe  $C^k$ .
3. Une classe de compatibilité d'atlas contient un unique atlas complet.

**Définition 1.6** Une structure de variété différentiable de classe  $C^k$  et de dimension  $n$  dans  $X$  est la donnée d'un atlas complet  $\mathcal{A}(X)$  de classe  $C^k$  et de dimension  $n$  dans  $X$ .

**Définition 1.7** Etant données deux structures de variété différentiable de même dimension et de même classe  $(X, \mathcal{A}(X))$  et  $(Y, \mathcal{A}(Y))$  un homéomorphisme  $h$  de  $X$  dans  $Y$  est appelé difféomorphisme de  $X$  dans  $Y$  si  $h \circ \phi \in \mathcal{A}(X)$  quel que soit  $\phi \in \mathcal{A}(Y)$ .

L'ensemble  $Diff(X)$  des difféomorphismes d'une variété différentiable  $X$  dans elle-même muni de la loi de composition d'applications est un groupe (abstrait).

**Définition 1.8** Une fonction continue définie dans une variété différentiable de classe  $C^k$   $X$  est dite différentiable de classe  $C^k$  si pour toute carte locale  $(U, \phi)$  la fonction  $f \circ \phi^{-1}$  est différentiable de classe  $C^k$ .

Concernant la dernière définition il revient au même de dire que pour toute carte locale  $(U, \phi)$  il existe une fonction différentiable locale de classe  $C^k$   $F$  définie dans l'ouvert  $\phi(U)$  telle que

$$f(x) = F(\phi(x))$$

quel que soit  $x \in U$ .

On munit l'ensemble  $C^k(X)$  des fonctions différentiables de classe  $C^k$  de l'addition

$$(f + f')(x) = f(x) + f'(x)$$

et de la multiplication ordinaire de deux fonctions

$$(ff')(x) = f(x)f'(x).$$

On obtient un anneau associatif commutatif.

## ADDENDA

Une structure différentiable définie par une atlas  $\mathcal{A}(X)$  est un cadre suffisant aux pratiques suivantes.

1. **L'Analyse Classique** : Majoration .
2. **Le Calcul Différentiel** : Théorème d'Inversion locale. Formule des Accroissements Finis. Théorème des Fonctions Implicites. Résolutions des Equations différentielles Ordinaires.

## EXEMPLES d'atlas

On se restreint à des exemples non triviaux.

1. Prenons pour  $X$  le **cercle unité** du plan  $\mathbb{R}^2$ . C'est l'ensemble des nombres complexes de module 1. On a un atlas formé de deux cartes locales dont les domaines sont les intervalles ouverts  $] - 10^{-11}, \pi + 10^{-11}[$  et  $]\pi - 10^{-11}, 2\pi + 10^{-11}[$ . Dans les deux intervalles l'homéomorphisme local est

$$\phi(t) = e^{it}.$$

2. Le second exemple est l'**espace projectif**  $\mathbb{R}P^m$ . C'est l'ensemble des directions non triviales passant par l'origine de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{m+1}$ . Chaque direction  $\delta$  passant par l'origine  $O \in \mathbb{R}^{m+1}$  rencontre la sphère unité en deux points diamétralement opposés. On considère les  $m + 1$  hyperplans

$$H_j = \{(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_{m+1})\}.$$

Chaque hyperplan  $H_j$  rencontre une direction issue de l'origine au plus une fois. Ce qui signifie que chaque  $H_j$  est homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}P^m$ .

## 1.2 PARAMETRISATIONS.

Considérons les espaces topologiques pointés  $(x, X)$  et  $(0, \mathbb{R}^n)$ .

**Définition 1.9** Une paramétrisation de dimension  $n$  au point  $x$  de l'espace topologique  $X$  est un homéomorphisme local d'espace topologique pointé  $\varphi$  de  $(0, \mathbb{R}^n)$  dans  $(x, X)$ .

**Définition 1.10** Deux paramétrisations  $\varphi$  et  $\psi$  de même dimension  $n$  et au même point  $x \in X$  sont dites  $C^k$ -compatibles si l'homéomorphisme local  $\varphi^{-1}\psi$  de  $(0, \mathbb{R}^n)$  dans  $(0, \mathbb{R}^n)$  est un difféomorphisme de classe  $C^k$ .

**Définition 1.11** Une paramétrisation de dimension  $n$  et de classe  $C^k$  de  $X$  est une famille  $\Phi = \bigcup_{x \in X} \Phi_x$  où  $\Phi_x$  est constitué des paramétrisations de classe  $C^k$  et de dimension  $n$  au point  $x \in X$  deux à deux compatibles.

**Définition 1.12** Une paramétrisation  $\Phi = \bigcup_{x \in X} \Phi_x$  de classe  $C^k$  et de dimension  $n$  est dite complète si toute paramétrisation  $\varphi$  de classe  $C^k$  et de dimension  $n$  qui est compatible avec  $\Phi_x$  est un élément de  $\Phi_x$ .

## REMARQUES

1. La notion de compatibilité de deux paramétrisations de même dimension et de même classe est évidente.
2. Si deux paramétrisations de même dimension  $n$  et de même classe  $C^k$  sont compatibles alors leur réunion est une paramétrisation de dimension  $n$  et de classe  $C^k$ .
3. Une classe de compatibilité de paramétrisation contient une unique paramétrisation complète.

**Définition 1.13** Une structure de variété différentiable de classe  $C^k$  et de dimension  $n$  dans  $X$  est un couple  $(X, \Phi)$  où  $\Phi$  est une paramétrisation complète de classe  $C^k$  et de dimension  $n$ .

**Définition 1.14** Soient  $(X, \Phi)$  et  $(Y, \Psi)$  des structures de variété différentiable de même dimension et de même classe. Un homéomorphisme  $h$  de  $X$  dans  $Y$  est appelé difféomorphisme de  $(X, \Phi)$  dans  $(Y, \Psi)$  si  $\Psi \circ h \in \Phi$  quel que soit  $\Psi \in \Phi$ .

**Définition 1.15** Soit  $X$  une variété de classe  $C^k$  dont la structure différentiable est définie par une paramétrisation  $\Phi$ . Une fonction continue  $f$  définie dans  $X$  est dite différentiable de classe  $C^k$  si  $f \circ \phi$  est différentiable de classe  $C^k$  quel que soit  $\phi \in \Phi$ .

## ECLAIREURS

Soit  $E$  un ensemble et  $G$  un sous-groupe du groupe des bijections de  $E$  dans lui-même.

1. Grosso modo la  $G$ -géométrie dans  $E$  est l'étude des invariants de l'action

$$G \times E \rightarrow E.$$

2. La définition des structures différentiables par des paramétrisations est une perspective mieux adaptée à certaines pratiques géométriques dans une variété différentiable  $X$ .

3. Au vu de l'anecdote ci-dessus cette perspective conduit à plusieurs pratiques dont celles qui suivent.

- a. La Pratique de la Géométrie Différentielle des sous-groupes du groupe  $Diff(X)$ . En particulier l'étude des Systèmes Dynamiques différentiables.
- b. L'Analyse Globale. En particulier la Géométrie des SEDP.
- c. La Topologie Différentielle. En particulier la Topologie des systèmes de Pfaff.

d. La Théorie des jauges dont la géométrie de l'information est un avatar.

### EXEMPLES de structure géométrique.

Je vais donner trois exemples où deux perspectives différentes laissent des ombres d'épaisseur différentes. Ces trois exemples ont un point commun.

#### 1. Le premier exemple est la géométrie riemannienne.

La meilleure approche destinée aux étudiants de L1 est celle d'algèbre linéaire à paramètre  $(V_x, \langle, \rangle_x)_{x \in X}$ . Chaque espace vectoriel  $V_x$  est équipé d'un produit scalaire  $\langle v, w \rangle_x$ . Si nous exprimons le produit scalaire dans une base  $e_1(x), \dots, e_n(x)$  de  $V_x$  on aura

$$\langle v(x), w(x) \rangle = \sum g_{ij}(x) v^i(x) w^j(x).$$

Si on travaille dans une base orthonormée la formule sera plus simple

$$\langle v(x), w(x) \rangle = \sum v^i(x) w^i(x).$$

Les matrices de changement de base orthonormée sont des matrices orthogonales.

L'enjeu est l'étude de la variation du membre de droite en fonction du paramètre  $x$ .

Faire comprendre cet enjeu ne nécessite pas l'introduction des concepts savants.

Le cas des  $V_x = T_x X$  conduit à la définition suivante

**Définition 1.16** *Si la famille d'espaces euclidiens  $(T_x, \langle, \rangle_x)_{x \in X}$  varie différemment alors le couple  $(X, \langle, \rangle)$  est une structure de variété riemannienne.*

Reprenons le même objet qu'est la géométrie riemannienne, mais sous la perspective de paramétrisation.

Si on veut décrire la structure riemannienne  $(X, \langle, \rangle)$  à l'aide des changements de paramétrisations on rencontrera une obstruction majeure qu'est le tenseur de courbure de la structure riemannienne en jeu.

Les paramétrisations sont donc moins adaptées à une définition élémentaire de la géométrie riemannienne. On ne peut définir sous la perspective des paramétrisations que des structures des variétés riemanniennes plates.

Pour contourner cette obstruction il faut recourir au fibré principal des repères linéaires d'ordre 1 et exprimer la structure riemannienne en terme de réduction du groupe structural. Ces notions sont savantes au niveau L1.

#### 2. Le deuxième exemple est la géométrie symplectique.

Sous la perspective d'algèbres à paramètres, l'analogue d'une famille d'espaces euclidiens  $(V_x, \langle, \rangle_x)_{x \in X}$  est une famille d'espaces symplectiques  $(V_x, \omega_x)_{x \in X}$ . Dans une base  $e_1(x), \dots, e_n(x)$  de  $V_x$  on aura

$$v = \sum x^i e_i + \sum y^i \epsilon_i.$$

$$\omega(v, v') = \sum_{1 \leq i \leq m} \omega_{i, m+i}(x^i y^{m+i} - y^i x^{m+i}).$$

L'analogie d'une base orthonormée est une base de Darboux  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2m}$  dans laquelle la forme symplectique  $\omega$  prend l'allure suivante

$$\omega(v, v') = \sum_{1 \leq i \leq m} (x^i y^{m+i} - y^i x^{m+i}).$$

La matrice de changement de base de Darboux est une matrice symplectique.

Par contraste avec la géométrie riemannienne la donnée d'une famille différentiable  $(T_x X, \omega_x)_{x \in X}$  d'espaces vectoriels symplectiques ne définit pas une structure de variété symplectique dans  $X$ . La perspective d'algèbre linéaire à paramètres est donc peu adaptée à l'introduction de la géométrie symplectique dans  $X$ . Pour cette dernière, la perspective féconde est celle des paramétrisations. Plus précisément, une structure symplectique dans  $X$  est une paramétrisation différentiable  $(X, \Phi)$  telle que pour tous  $\phi, \phi' \in \Phi_x$  la différentielle  $d(\phi^{-1} \circ \phi')(0)$  habite le sous-groupe du groupe linéaire formé des matrices symplectiques.

Une conclusion tirée de ces deux exemples est constituée des deux observations suivantes : Sous hypothèse de différentiabilité,

- a. La perspective d'algèbre linéaire à paramètre rend simple la définition de la géométrie riemannienne et obscurcie celle de la géométrie symplectique.
- b. La perspective des paramétrisations rend simple la définition de la géométrie symplectique et obscurcie celle de la géométrie riemannienne.

### 1.3 STRUCTURE FONCTIONNELLE OU STRUCTURE D'ESPACE ANNELE.

Soit  $X$  un espace topologique et soit  $O(X)$  l'ensemble des parties ouvertes de  $X$ . Pour  $U \in O(X)$  on note  $C(U)$  l'ensemble des fonctions continues définies dans  $U$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soient  $U$  et  $V$  des ouverts de  $X$  tels que  $U \subset V$ . L'application restriction de  $C(V)$  dans  $C(U)$  est notée  $\rho_{UV}$ . Notons  $C$  la réunion des  $C(U)$ . Cette réunion jouit des propriétés suivantes

1. Pour  $U, V, W \in O(X)$ ,  $U \subset V \subset W$  entraîne  $\rho_{UV} \circ \rho_{VW} = \rho_{UW}$ .
2. Soit  $U = \cup_j U_j$ ,  $U_j \in O(X)$  et soit  $f$  une fonction définie dans  $U$ . Si  $\rho_{U_j U}(f) \in C(U_j) \quad \forall j$  alors  $f \in C(U)$ .

Converties en définition les propriétés 1. et 2. signifient que  $C$  est le faisceau (de base  $X$ ) des fonctions continues. Les éléments  $f \in C(U)$  sont appelés sections de  $C$  au dessus de  $U$ .

La notion de sous-faisceau d'un faisceau  $C$  est facile à concevoir. C'est un faisceau  $\mathcal{F}$  dont les sections sont des sections de  $C$ .

On observe que l'ensemble des sections de  $C$  au dessus de  $U$  est un anneau associatif et commutatif pour les opérations naturelles suivantes

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

et

$$fg(x) = f(x)g(x).$$

**Définition 1.17** Soient  $f, g$  des sections de  $C$  et  $x \in X$ . On dit  $f$  et  $g$  définissent le même germe au point  $x$  s'il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  tel que

$$f(y) = g(y)$$

quel que soit  $y \in U$ .

Définir le même germe en un point est une relation d'équivalence dans l'ensemble des sections de  $C$ . Une classe d'équivalence est appelée germe des sections de  $C$ .

**Proposition 1.1** La propriété de définir le même germe en un point est compatible avec la structure d'anneau des  $C(U)$ .

**Définition 1.18** Un anneau est dit local lorsqu'il possède un unique idéal maximal propre (i.e différent de l'anneau total).

les anneaux  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  sont des anneaux locaux.

Un autre exemple est l'anneau  $\mathbb{K}[x]$  avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

L'anneau des germes en  $x$  des sections de  $C$  est un anneau local. Son idéal maximal est l'idéal des germes des fonctions nulles au point  $x$ .

**Définition 1.19** Une structure fonctionnelle dans  $X$  ou une structure d'espace annelé dans  $X$  est la donnée d'un sous-faisceau d'anneaux  $\mathcal{F}$  de  $C$  dont les germes sont des anneaux locaux.

### EXEMPLES et contre-exemples.

1. Soit  $C^+(U) \subset C(U)$  le sous-ensemble des sections paires. La réunion des  $C^+(U)$  définit une structure fonctionnelle.
2. Soit  $C^- \subset C$  les sous-ensemble des sections impaires de  $C$ . C'est un sous-faisceau qui ne définit pas une structure fonctionnelle dans  $X$ .

**Définition 1.20** Une structure fonctionnelle  $(X, \mathcal{F})$  est de dimension  $n$  si tout  $x \in X$  possède un voisinage ouvert  $U(x)$  qui est domaine de  $n$  sections  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}(U(x))$  telles que l'application

$$y \rightarrow (f_1(y), \dots, f_n(y))$$

est un homéomorphisme de  $U(x)$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

## REMARQUE

La définition ci-dessus implique la propriété suivante.

Pour tout  $f \in \mathcal{F}(U(x))$  il existe un unique  $\tilde{f} \in C(\mathbb{R}^n)$  telle que

$$f(y) = \tilde{f}(f_1(y), \dots, f_n(y))$$

pour tout  $y \in U(x)$ .

Posons  $F = (f_1, \dots, f_n)$ . Le couple  $(U(x), F)$  est appelé carte locale de  $(X, \mathcal{F})$ . La notion de  $C^k$ -compatibilité des cartes locales est claire. En effet soient  $(U(x), F)$  et  $(U(y), G)$  des cartes locales avec  $U(x) \cap U(y) \neq \emptyset$ . Des homéomor-

phismes

$$F, G : U(x) \cap U(y) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

on déduit l'homéomorphisme

$$G \circ F^{-1} : F(U(x) \cap U(y)) \rightarrow G(U(x) \cap U(y)).$$

**Définition 1.21** *Les cartes locales  $(U(x), F)$  et  $(U(y), G)$  sont dites  $C^k$ -compatibles si  $G \circ F^{-1}$  est de classe  $C^k$ .*

**Définition 1.22** *Une structure fonctionnelle  $(X, \mathcal{F})$  de dimension  $n$  est dite de classe  $C^k$  si ses cartes sont deux à deux  $C^k$ -compatibles.*

**Définition 1.23** *Une structure de variété différentiable de classe  $C^k$  et de dimension  $n$  dans  $X$  est la donnée d'une structure fonctionnelle de classe  $C^k$  et de dimension  $n$  dans  $X$ .*

### Services immédiats.

Lorsqu'une variété différentiable est regardée sous la perspective de sa structure fonctionnelle la paracompacité rend des grands services immédiats. La raison principale est que la géométrie différentiable globale de  $X$  est déterminée en totalité par l'anneau  $\mathcal{F}(X)$  des sections globale de son faisceau structural  $(X, \mathcal{F})$ .

Soient  $X$  et  $Y$  des variétés différentiables de même dimension et de même classe  $C^k$  définies par leur structure fonctionnelle respective  $(X, \mathcal{F}(X))$  et  $(Y, \mathcal{F}(Y))$ .

**Définition 1.24** *Une application (ensembliste)  $h$  de  $X$  dans  $Y$  est appelée application différentiable de classe  $C^k$  de  $X$  dans  $Y$  si l'application*

$$f \rightarrow f \circ h$$

*est un homomorphisme d'anneau unitaire de  $\mathcal{F}(Y)$  dans  $\mathcal{F}(X)$ . L'application  $h$  est un difféomorphisme de  $X$  dans  $Y$  lorsque*

$$f \rightarrow f \circ h$$

*est un isomorphisme d'anneau unitaire de  $\mathcal{F}(Y)$  sur  $\mathcal{F}(X)$*

## Pour quoi faire ?

Je viens de faire remarquer que la géométrie différentielle globale d'une variété différentiable  $X$  est déterminée par l'anneau structural  $\mathcal{F}(X)$ . On a ainsi un cadre propice à la pratique de l'Analyse Fonctionnelle d'ordre supérieur (i.e. dans des espaces des jets au-dessus de  $X$ ).

### 1.4 ALGÈBRE LINEAIRE A PARAMETRE.

Je vais juste lever un coin de voile sur cette dernière perspective. (J'y ai déjà fait allusion dans une sous-section précédente)

Soit  $X$  un espace topologique. Soit  $\{V_x, x \in X\}$  une famille d'espaces vectoriels indexés par les  $x \in X$ . Pour simplifier à l'extrême on suppose que les  $V_x$  ont la même dimension finie.

L'algèbre multi-linéaire dans  $V_x$  peut être pensée comme étant la  $GL(V_x)$ -géométrie différentielle dans la variété  $V_x$ .

A titre d'illustration on peut définir dans  $V_x$  des produits scalaires au sens large. Des produits symplectiques. Des tenseurs de structure complexe. Des structures d'algèbre.

La question fondamentale est de contrôler la pratique en jeu lors de la variation du paramètre  $x \in X$ . Par exemple que signifie

Varier continuellement avec  $x \in X$  ? Varier différemment avec  $x \in X$  ? Quelles conséquences de ces hypothèses ?

Ces considérations prennent de l'importance lorsqu'on souhaite comparer un phénomène non linéaire à la partie polynômiale de son développement limité. (e.g. méthodes numériques)

Supposons que  $X$  est une variété différentiable de classe  $C^\infty$ . Soit  $\mathcal{E}$  un phénomène dont les informations locales (i.e dans les ouverts de  $X$ ) ont de l'importance. Nous verrons qu'avec un bon choix de connexion linéaire les applications *exp* et *log* permettent des aller-retours entre des ouverts pointés  $(x, U(x))$  de la variété  $X$  et des ouverts pointés  $(0, U(0))$  des espaces des vecteurs tangents à  $X$ . On sera alors en mesure de mettre un contenu derrière les expressions suivantes :

1. varier continuellement.
2. Varier différemment.

Des cadres où la perspective de vision d'algèbre linéaire à paramètre est efficace, le plus fécond est la géométrie et la topologie de Zariski des structures algébriques et de leurs déformations lorsque ces dernières sont contrôlables par des complexes des chaînes.

Le lecteur verra ici pourquoi aux objets de la géométrie différentielle (e.g. connexions) et de la topologie classique (e.g. revêtements) ont fait suite ceux de l'algèbre homologique effective.

## 2 CHAMPS DES VECTEURS TANGENTS.

Applications différentiables.

Dérivées.

Chaque perspective de définition de structure de variété différentiable génère sa propre définition de champ des vecteurs tangents. Le lecteur s'assurera de l'équivalence de ces diverses définitions.

### 2.1 CHAMPS DES VECTEURS TANGENTS.

Versus Atlas.

Soient  $(X, \mathcal{A})$  une structure de variété différentiable définie par un atlas  $\mathcal{A}$ . Soit  $x \in X$ , on pose  $C_x^0([-1, 1], X)$  l'ensemble des courbes paramétrées continues

$$c : [-1, 1] \rightarrow X$$

tels que  $c(0) = x$

**Définition 2.1** Deux courbes paramétrées  $c, c' \in C_x^0([-1, 1], X)$  appartiennent au même germe au point  $x$  s'il existe un nombre réel positif  $\epsilon < 1$  tel que  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[$  entraîne

$$c(t) = c'(t).$$

La relation ci-dessus est une relation d'équivalence. La classe de la courbe  $c$  est notée  $[c]_x$ . Cette classe est appelée germe des courbes paramétrées au point  $x$ .

**Définition 2.2** Une courbe paramétrée  $c \in C^0([-1, 1], X)$  est différentiable de classe  $C^k$  si pour toute fonction différentiable  $f \in C^k(X)$  la fonction

$$t \rightarrow f(c(t))$$

est différentiable de classe  $C^k$  dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

Soit  $c \in C^0([-1, 1], X)$  une courbe paramétrée différentiable de classe  $C^k$  et  $f \in C^k(X)$ . Posons  $x = c(0)$ .

La limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(t)) - f(x)}{t}$$

existe. En outre cette limite ne dépend que du germe  $[c]_x$ .

On définit ainsi l'application  $v_x : C^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$  en posant

$$v_x(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(t)) - f(x)}{t}.$$

L'application  $v_x$  jouit des propriétés suivantes

1. elle est  $\mathbb{R}$ -linéaire.
2.  $v_x(fg) = v_x(f)g(x) + f(x)v_x(g)$ .

**Définition 2.3** *L'application linéaire  $v_x : C^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$  est appelé vecteur tangent à  $X$  au point  $x$ .*

On obtient ainsi une application injective qui associe à tout germe des courbes  $[c]_x$  une application linéaire  $v_x$  de  $C^k(X)$  dans  $\mathbb{R}$ .

On note  $T_x X$  le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(C^k(X), \mathbb{R})$  des applications linéaires engendré par les  $v_x$ .

**Définition 2.4** *L'espace vectoriel  $T_x X$  est appelé espace tangent au point  $x$  à la variété différentiable  $X$ .*

**Définition 2.5** *La dimension de l'espace vectoriel  $T_x X$  est appelée dimension de la variété  $X$ .*

**Définition 2.6** *Un champ de vecteurs tangents est une application  $v$  qui associe à chaque point  $x \in X$  un vecteur tangent  $v_x \in T_x X$ .*

Soit  $(v, f)$  un couple formé d'un champ des vecteurs tangents  $v$  et d'une fonction  $f \in C^k(X)$ . On lui associe la fonction  $v(f)$  définie par

$$v(f)(x) = v_x(f).$$

Le champ des vecteurs tangents  $v$  est dit de classe  $C^k$  si  $v(f)$  est de classe  $C^k$  pour tout  $f$  de classe  $C^{k+1}$ .

## EXEMPLE

Dans  $X = \mathbb{R}$  le champ des vecteurs tangents

$$v = t^3 \sin\left(\frac{1}{t}\right) \frac{d}{dt}$$

est de classe  $C^1$ .

## 2.2 CHAMPS DES VECTEURS TANGENTS.

### Versus Paramétrisations.

Soit  $X$  une variété différentiable dont la structure différentiable est définie par une paramétrisation  $\Phi$ .

### Rappels

Rappelons qu'une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable de classe  $C^k$  au

point  $x \in X$  si quelle que soit la paramétrisation  $\varphi \in \Phi_x$  la fonction  $f \circ \varphi$  est de classe  $C^k$  à l'origine  $0 \in \mathbb{R}^n$ .

Rappelons qu'une courbe paramétrée  $c \in C^0([-1, 1], X)$  est différentiable de classe  $C^k$  si la fonction  $f \circ c$  est différentiable de classe  $C^k \quad \forall f \in C^k(X)$ . La notion de germe de courbe paramétrée  $[c]_x$  et celle de vecteur tangent  $v_x$  qui en découle n'utilisent que la notion de fonction différentiable. Ainsi concernant les vecteurs tangents et les champs des vecteurs tangents rien de nouveau par rapport à la perspective ATLAS.

On sait que tout couple  $(v, f)$  formé d'un champ des vecteurs tangents  $v$  et d'une fonction différentiable  $f$  donne lieu à une seconde fonction  $v(f)$  définie par

$$v(f)(x) = v_x(f).$$

On sait aussi que cette association obéit à la règle de calcul suivante.

$$v(fg) = v(f)g + fv(g).$$

## 2.3 CHAMPS DES VECTEURS TANGENTS.

### Versus structure d'espace fonctionnel.

Soit  $X$  une variété différentiable dont la structure différentiable est définie par une structure fonctionnelle de classe  $(X, \mathcal{F})$ .

Sous la perspective de structure d'espace fonctionnel la définition de champ des vecteurs tangents est comme on s'y attend purement algébrique. Pour éviter des difficultés non essentielles on va supposer que la classe de différentiabilité est  $C^\infty$ .

**Définition 2.7** *Un champ de vecteurs tangents dans  $(X, \mathcal{F}(X))$  est une  $\mathbb{R}$ -dérivation de l'anneau structural  $\mathcal{F}(X)$ .*

Si  $v$  est un champ de vecteurs tangents on aura

$$v(fg) = v(f)g + fv(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(X).$$

Un champ des vecteurs tangents  $v$  preserve sections locales et commute avec l'application restriction. En d'autres termes si  $U \subset V$  sont des ouverts de  $X$  on aura

$$\begin{aligned} v(\mathcal{F}(U)) &\subset \mathcal{F}(U), \\ \rho_{UV}(v(f)) &= v(\rho_{UV}(f)). \end{aligned}$$

On associe à tout point  $x \in X$  une structure de  $\mathcal{F}(X)$ -module dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f * \lambda = f(x)\lambda$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{F}(X)$ . En fait les propriétés suivantes sont évidentes

1.  $(fg) * \lambda = f * (g * \lambda)$

2.  $(f + g) * \lambda = f * \lambda + g * \lambda$
3.  $1 * \lambda = \lambda$ .

**Définition 2.8** *Un vecteur tangent au point  $x$  à  $X$  est une application linéaire  $v_x$  de  $\mathcal{F}(X)$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant l'identité*

$$v_x(fg) = v_x(f)g(x) + f(x)v_x(g)$$

Naturellement tout champ des vecteurs tangents  $v$  vu comme dérivation de l'anneau structural définit en chaque point  $x \in X$  un vecteur tangent  $v_x$

$$v_x(f) = (v(f))(x).$$

En fait  $v_x$  est une dérivation de l'anneau  $\mathcal{F}(X)$  à valeur dans le  $\mathcal{F}(X)$ -module  $\mathbb{R}$ . L'espace tangent à  $(X, \mathcal{F})$  au point  $x$  est le sous-espace vectoriel de  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(X), \mathbb{R})$  engendré par les  $v_x$ . Ce sous-espace vectoriel est noté  $T_x X$ .

## 2.4 DERIVEES DES APPLICATIONS DIFFERENTIABLES.

La notion de germe des courbes paramétrées est commune aux trois perspectives atlas-paramétrisation-structure fonctionnelle.

Un vecteur tangent  $v_x$  dérive d'un germe des courbes paramétrées  $[c]_x$  par la formule

$$v_x(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(t)) - f(c(0))}{t}.$$

Dans le membre de droite de la formule ci-dessus la courbe  $c(t)$  appartient au germe  $[c]_x$  et  $c(0) = x$ .

Sous les trois perspectives un vecteur tangent est une application linéaire  $v_x$  de l'anneau structural  $\mathcal{F}(X)$  dans  $\mathbb{R}$ .

Sous les perspectives ATLAS et PARAMETRISATION une application différentiable de  $X$  dans  $Y$  est au départ une application continue  $h$  de  $X$  dans  $Y$ .

Sous la perspective de structure d'espace fonctionnel une application différentiable de  $X$  dans  $Y$  est un homomorphisme d'anneau unitaire  $h^*$  de  $\mathcal{F}(Y)$  dans  $\mathcal{F}(X)$ .

On voit sans difficulté qu'à première vue la notion de dérivé d'une application différentiable dépendra de la perspective adoptée. Cependant ce qui leur est commun est la NATURE de la dérivée d'une application différentiable. Cette nature commune est la formulation suivante.

Si  $h$  est une application différentiable de  $X$  dans  $Y$  et  $x \in X$  la dérivée de  $h$  au point  $x \in X$  est une application linéaire  $d_x(h)$  de  $T_x X$  dans  $T_{h(x)} Y$ . Reste à définir cette application linéaire.

Puisqu'un vecteur tangent  $[c]_x \in T_x X$  donne lieu à une application linéaire

de  $\mathcal{F}(X)$  dans  $\mathbb{R}$  son image  $d_x(h)(v_x)$  est une application linéaire de  $\mathcal{F}(Y)$  dans  $\mathbb{R}$ .

Les remarques faites ci-dessus nous conduisent à donner deux formules de définition de la dérivée  $d_x h$  suivant la perspective.

**Définition 2.9** (1). *Dérivée versus atlas.*

La dérivée  $d_x(h)$  est donnée par la formule

$$[(d_x(h))(v_x)](g) = v_x(g \circ h)$$

quelque soit  $\forall g \in \mathcal{F}(Y)$ . (2). **Dérivée versus structure d'espace fonctionnel.**

La dérivée  $d_x(h^*)$  est donnée par la formule

$$[(d_x(h^*))(v_x)](g) = v_x(h^*(g))$$

quelque soit  $\forall g \in \mathcal{F}(Y)$ .

Sous chacune des trois perspectives Atlas-paramétrisations-structure fonctionnelle il a été question de carte locale.

Cette notion fédératrice permet le passage d'une perspective aux deux autres et de voir que les deux notions de dérivée d'application différentiable sont équivalentes .

### 3 FORMES DIFFERENTIELLES.

#### Dérivation extérieure.

On a traité trois perspectives de regard sur une structure de variété différentiable fixée définie dans un espace topologique  $X$ .

Dorénavant, c'est à dire dans cette section et dans les suivantes, sauf mention expresse du contraire la classe de différentiabilité est  $C^\infty$ . Variété voudra toujours dire variété différentiable de classe  $C^\infty$ .

Je rappelle que ces notes sont destinées aux membres du GDR Science-Géométrie de l'Information. C'est donc des notes pour ainsi dire effectives. Pour traiter les formes différentielles j'adopte ici la présentation de structure différentiable sous la perspective d'espace fonctionnel. Sous cette perspective l'algèbre est (en apparence) plus présente que l'analyse et la topologie. Cette apparence est trompeuse. La raison est qu'à cause de l'argument de parcompacité le faisceau structural est recouvert par l'anneau structural qui est un invariant géométrique global. Il contient donc la topologie générale de  $X$ .

On verra dans la seconde partie que ce point de vue éclaire davantage, pour ne pas dire mieux, des problèmes importants de la Géométrie de l'information.

#### 3.1 FORMES DIFFERENTIELLES.

Soit  $X$  une variété de dimension  $m$  dont la structure différentiable est définie par son algèbre structurale  $\mathcal{F}(X)$  des fonctions différentiables. La loi du groupe du groupe abélien et le produit dans l'anneau  $\mathcal{F}(X)$  sont l'addition et la multiplication classiques des fonctions réelles

$$(f + f')(x) = f(x) + f'(x),$$

$$(ff')(x) = f(x)f'(x).$$

Avec ces lois de composition  $\mathcal{F}(X)$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre associative commutative unitaire.

L'espace vectoriel des dérivations de  $\mathcal{F}(X)$  est noté  $\mathcal{X}(X)$ . On y définit une loi de composition qui associe à deux dérivations  $\xi$  et  $\zeta$  leur commutateur, (on dit aussi leur crochet)

$$[\xi, \zeta] = \xi \circ \zeta - \zeta \circ \xi.$$

Cette loi est  $\mathbb{R}$ -bilinéaire et anticommutative.

On observe  $\mathcal{X}(X)$  est un  $\mathcal{F}(X)$ -module, cependant le crochet

$$(a, b) \rightarrow [a, b]$$

n'est pas  $\mathcal{F}(X)$ -bilinéaire.

Soient  $a, b \in \mathcal{X}(X)$  et  $f, g \in \mathcal{F}(X)$ . On a les formules suivantes

$$(fa)(g) = fa(g),$$

$$[a, fb] = f[a, b] + a(fb).$$

Le couple  $A(X) = (\mathcal{X}(X), [,])$  est une structure d'algèbre de Lie dans  $\mathcal{X}(X)$ .

Ce qui signifie que le crochet

$$(a, b) \rightarrow [a, b]$$

satisfait l'identité de Jacobi suivante

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$$

quels que soient  $a, b, c \in A(X)$ .

**Définition 3.1** *Etant donné un nombre entier non négatif  $k$  une forme différentielle de degré  $k$  ( ou  $k$ -forme différentielle ) est une application  $\mathcal{F}(X)$ -multilinéaire alternée*

$$A(X) \times \dots \times A(X) \xrightarrow{\omega} F(X).$$

La définition signifie que  $\omega$  est une fonction de  $k$  variables

$$(a_1, \dots, a_k) \rightarrow \omega(a_1, \dots, a_k)$$

qui change de signe quand on permute deux des arguments  $a_1, \dots, a_k$  et qui est  $\mathcal{F}(X)$ -linéaire par rapport à chacun des arguments  $a_1, \dots, a_k$ .

On convient que pour  $k = 0$  les formes différentielles de degré 0 sont les fonctions différentiables i.e. les sections de  $\mathcal{F}(X)$ .

## 3.2 PRODUIT EXTERIEUR.

L'ensemble  $\Omega^k(X)$  des  $k$ -formes différentielles est un module sur l'anneau structural  $\mathcal{F}(X)$ .

On convient que les formes différentielles de degré négatif sont réduites à 0. Alors on note  $\Omega(X)$  le  $\mathcal{F}(X)$ -module  $\mathbb{Z}$ -gradué par les sous-modules homogènes  $\Omega^k(X)$ .

Soient  $\omega$  et  $\omega'$  des formes différentielles de degré  $k$  et  $k'$  respectivement.

**Définition 3.2** *Le produit extérieur  $\omega \wedge \omega'$  est une  $(k+k')$ -forme différentielle définie par la formule suivante*

$$(\omega \wedge \omega')(a_1, \dots, a_{k+k'}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(k:k')} \text{sign}(\sigma) \omega(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k)}) \omega'(a_{\sigma(k+1)}, \dots, a_{\sigma(k+k')}).$$

Dans la formule ci-dessus  $\mathcal{S}(k : k')$  est le sous-ensemble des permutations  $\sigma$  de  $(1, 2, \dots, k + k')$  telle que

$$\sigma(1) \angle \sigma(2) \angle \dots \angle \sigma(k)$$

et

$$\sigma(k+1) \angle \sigma(k+2) \angle \dots \angle \sigma(k+k'),$$

$\text{sign}(\sigma)$  est la signature de la permutation  $\sigma$ .

Par  $\mathcal{F}(X)$ -linéarité on étend le produit extérieur dans tout  $\Omega(X)$ . Le produit extérieur est associative,  $\mathcal{F}(X)$ -bilinéaire et commutatif gradué dans le sens suivant

$$\omega \wedge \omega' = (-1)^k \omega' \wedge \omega$$

Si  $\omega \in \Omega^k(X)$ .

### Dérivation de Lie dans la direction d'un champ des vecteurs tangents.

Soit  $a \in A(X)$  et  $\omega \in \Omega^k(X)$ . La dérivation de Lie dans la direction  $a$  est l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire de degré 0 notée  $L_a : \Omega(X) \rightarrow \Omega(X)$  définie par la formule suivante

$$L_a(\omega)(a_1, \dots, a_k) = a(\omega(a_1, \dots, a_k)) - \sum_{1 \leq j \leq k} \omega(a_1, \dots, [a, a_j], \dots, a_k).$$

Pour tout  $a \in A(X)$   $L_a$  est une dérivation du produit extérieur. En d'autres termes

$$L_a(\omega \wedge \omega') = L_a(\omega) \wedge \omega' + \omega \wedge L_a(\omega').$$

### Produit intérieur par un champ des vecteurs tangents.

C'est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire de degré  $-1$  notée  $\iota_a$  et définie par la formule suivante :

$$\iota_a(\omega)(a_1, \dots, a_{k-1}) = \omega(a, a_1, \dots, a_{k-1})$$

si  $\omega \in \Omega^k(X)$ . C'est aussi une dérivation d'algèbre graduée dans le sens suivant. Pour  $\omega \in \Omega^k(X)$  et  $\beta \in \Omega(X)$  on a la formule

$$\iota_a(\omega \wedge \beta) = \iota_a(\omega) \wedge \beta + (-1)^k \omega \wedge \iota_a(\beta).$$

### Dérivation extérieure.

La dérivation extérieure est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire de degré 1 notée

$d$  et définie comme il suit. Soient  $\omega \in \Omega^k(X)$  et  $a_1, \dots, a_{k+1} \in \mathcal{A}(X)$ . On a

$$\begin{aligned} d\omega(a_0, \dots, a_k) &= \sum_{0 \leq j \leq k} (-1)^j a_j(\omega(a_0, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_k)) \\ &+ \sum_{i \neq j} (-1)^{i+j} \omega([a_i, a_j], \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots). \end{aligned}$$

C'est une dérivation d'algèbre graduée. On a donc

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^k \omega \wedge d\omega'$$

si  $\omega \in \Omega^k(X)$ .

### Sous-produit de la Dérivation extérieure.

Le produit intérieur et la dérivation extérieure sont des opérations de carré nul, c'est à dire

$$\begin{aligned} \iota_X(\iota_X \omega) &= 0, \\ d(d\omega) &= 0 \end{aligned}$$

pour tout  $\omega \in \Omega(X)$ . On a donc les inclusions

$$\begin{aligned} im(\iota) &\subset ker(\iota), \\ im(d) &\subset ker(d). \end{aligned}$$

Des dérivations  $L_a, \iota_a, d$  de  $\Omega(X)$ , seule  $\iota_a$  est  $\mathcal{F}(X)$ -linéaire. L'espace vectoriel quotient

$$H(\Omega(X)) = \frac{ker(d)}{im(d)}$$

est appelé espace cohomologie de de Rham de la variété  $X$ . Parce que  $d$  est une dérivation de l'algèbre graduée

$$\Omega(X) = \bigoplus_k \Omega^k(X)$$

l'espace vectoriel  $H(\Omega(X))$  est gradué par les sous-espaces vectoriels homogènes

$$H^k(\Omega(X)) = \frac{ker(d : \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^{k+1}(X))}{d(\Omega^{k-1}(X))}.$$

Soient  $(\omega, \omega') \in \Omega^k(X) \times \Omega^{k'}(X)$  la formule

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^k \omega \wedge d\omega'$$

montre que  $ker(d)$  est une sous-algèbre graduée et  $im(d)$  est un idéal dans la sous-algèbre  $ker(d)$ . Par conséquent, l'espace quotient  $H(\Omega(X))$  hérite du produit extérieur dans  $ker(d)$  d'une structure d'algèbre graduée. C'est

l'algèbre de de Rham de la variété  $X$  noté  $H_{dR}(X, \mathbb{R})$

### Curiosités.

Le sous-espace vectoriel

$$H_{dR}^k(X, \mathbb{R}) = H^k(\Omega(X))$$

est appelé  $k^{\text{ième}}$  espace de cohomologie de de Rham de la variété  $X$ .

Le nombre entier

$$b_k = \dim_{\mathbb{R}} H_{dR}^k(X, \mathbb{R})$$

est appelé  $k^{\text{ième}}$  nombre de Betti de la variété  $X$ .

Les nombres de Betti sont des invariants topologiques. Ceci veut dire que deux variété homéomorphes ont les mêmes nombres de Betti mais la réciproque n'est vraie que rarement.

Par exemple si le premier nombre de Betti d'une variété riemannienne plate  $X$  vaut  $k$  alors on a une idée précise de ce à quoi ressemble  $X$ .

Si  $\dim(X) = m$  à revêtements finis près  $X$  est isométrique au produit direct

$$\mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{T}^k$$

où  $\mathbb{R}^{m-k}$  est l'espace euclidien et  $\mathbb{T}^k$  le tore euclidien

$$\mathbb{T}^k = \frac{\mathbb{R}^k}{\mathbb{Z}^k}.$$

### Quelques formules.

Ce sont des formules du calcul extérieur. Soit  $a, a' \in \mathcal{A}(X)$ . On a les formules suivantes

$$L_a = d \circ \iota_a + \iota_a \circ d.$$

$$L_{[a,a']} = L_a \circ L_{a'} - L_{a'} \circ L_a.$$

$$\iota_{[a,a']} = L_a \circ \iota_{a'} - L_{a'} \circ \iota_a.$$

Parceque le carré de  $d$  est nul les formules ci-dessus montrent que pour tout  $a \in \mathcal{A}(X)$  on a les relations de commutation suivantes

$$L_a \circ d = d \circ L_a.$$

$$\iota_a \circ L_a = L_a \circ \iota_a.$$

## 4 NOTION DE CONNEXION.

### Variation.

Je me propose de consacrer cette section à trois types de connexion et de mettre en lumière les liens entre elles. Comme pour les perspectives de regard sur la structure de variété différentiable il est fréquent que l'ombre qui couvre telle propriété d'une connexion soit moins épaisse sous une perspective que sous d'autres.

Comme convenu la classe de différentiabilité est  $C^\infty$ . Cette hypothèse concerne également tous les objets définis dans les variétés en jeu.

### 4.1 CONNEXIONS PRINCIPALES. FORMES DE CONNEXION PRINCIPALE.

**Outils auxiliaires.** Je vais rappeler ci-dessous des notions d'usage en systèmes dynamiques abstraits ou différentiables. C'est-à-dire des actions de groupes abstraits ou de groupes de Lie.

#### 1. GROUPE DE LIE

**Définition 4.1** *Grosso modo, un groupe de Lie est une variété différentiable  $G$  munie d'une structure de groupe (abstrait) notée multiplicativement*

$$(g, g') \rightarrow gg'$$

*telle que l'application de  $G \times G$  dans  $G$  définie par*

$$(g, g') \rightarrow g^{-1}g'$$

*est différentiable.*

Voici des exemples de groupe de Lie.

1.1. Le **groupe linéaire général**  $GL(n, \mathbb{R})$ . C'est le groupe des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels et dont le déterminant est non nul. C'est un ouvert de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Le signe de déterminant partage ce groupe en deux composantes connexes.

1.2. Le **groupe linéaire spécial**  $SL(n, \mathbb{R})$  est le sous-groupe du précédent constitué des matrices carrées dont le déterminant est égal à  $-1$  ou à  $+1$ . C'est une sous-variété fermée de  $GL(n, \mathbb{R})$  de dimension  $n^2 - 1$ .

1.3. Le **groupe orthogonal**  $\mathcal{O}(n)$  est le sous-groupe de  $SL(n, \mathbb{R})$  formé des matrices  $A$  solution de

$$AA^t = 1_n.$$

Dans le membre de gauche de la dernière égalité  $A^t$  est la transposée de la matrice  $A$ , dans le membre de droite  $1_n$  est matrice unité. Ce groupe est aussi un sous-groupe fermé de  $GL(n, \mathbb{R})$ . Sa dimension est égale à  $\frac{n(n-1)}{2}$ . Il possède aussi deux composantes connexes.

1.4. Le **groupe symplectique**  $Sp(2n, \mathbb{R})$  est le sous-groupe de  $SL(2n, \mathbb{R})$  formé des matrices  $A$  solutions de

$$AJA^t = J$$

où  $J$  est matrice carrée  $J_{p,n+p} = 1$  et  $J_{n+p,p} = -1$   $1 \leq p \leq n$ , les autres coefficients sont nuls. C'est un sous-groupe fermé de dimension  $n(2n+1)$ .

1.5. Le **groupe multiplicatif**  $H^*$  des quaternions non nuls est un groupe de Lie de dimension 4.

1.6. La **sphère**  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  est un groupe de Lie. C'est le sous-groupe de  $H^*$  constitué des quaternions de norme 1.

## 2. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Tout élément  $g \in G$  d'un groupe  $G$  définit la translation à gauche  $L_g$  et la translation à droite  $R_g$ . Ce sont des bijections de  $G$  dans  $G$  définies par

$$L_g(g') = gg',$$

$$R_g(g') = g'g.$$

Soit  $G$  un groupe de Lie. Pour  $g \in G$   $L_g$  et  $R_g$  sont des difféomorphismes de la variété  $G$ .

**Définition 4.2** *Un champ des vecteurs tangents  $\xi \in \mathcal{X}(G)$  est invariant à gauche si pour tout  $g \in G$  on a*

$$d(L_g)(\xi) = \xi.$$

L'invariance à gauche signifie donc que pour  $g, g' \in G$  on a

$$(d_{g'}(L_g))(\xi(g')) = \xi(L_g(g')).$$

Le champ des vecteurs tangents  $\xi$  est invariant à droite si pour tout  $g \in G$  on a

$$(d(R_g))(\xi) = \xi.$$

On voit qu'un champ des vecteurs tangents invariant à gauche (ou invariant à droite)  $\xi$  est défini par sa valeur  $\xi(e)$  en l'élément neutre  $e$  du groupe de Lie  $G$ . la dimension de l'espace vectoriel des champs de vecteurs tangents invariants à gauche est égale à la dimension de la variété  $G$ .

Rappelons que quelle que soit la perspective de regard sur la structure de variété différentiable la dérivée  $d(h)$  d'un difféomorphisme  $h$  transforme un champ des vecteurs tangents  $\xi$  en un champ des vecteurs tangents  $(d(h))(\xi)$ . En outre on a

$$(d(h))([\xi, \zeta]) = [(d(h))(\xi), (d(h))(\zeta)].$$

Maintenant il est facile de voir que dans un groupe de Lie  $G$  le crochet  $[\xi, \zeta]$  des champs des vecteurs tangents invariants à gauche est un champ des vecteurs tangents invariants à gauche.

Le crochet des champs des vecteurs tangents satisfait l'identité de Jacobi.

**Définition 4.3** *Le sous-espace vectoriel  $\mathcal{G}$  des champs des vecteurs tangents invariants à gauche dans un groupe de Lie  $G$  est appelé algèbre de Lie du groupe de Lie  $G$ .*

En dimension finie la topologie de  $G$  et la structure du groupe de Lie de  $G$  sont complètement déterminées par la structure d'algèbre de Lie de l'espace vectoriel  $\mathcal{G}$ .

### 3. Loi d'opération de groupe.

**Définition 4.4** *Une loi d'opération différentiable à gauche d'un groupe de Lie  $G$  dans une variété différentiable  $X$  est une application de  $G \times X$  dans  $X$  notée multiplicativement*

$$(g, x) \rightarrow gx$$

$\forall g \in G, \forall x \in X$  telle que

$$(gg')x = g(g'x),$$

$$ex = x$$

où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ .

**Définition 4.5** *Une loi d'opération différentiable à droite d'un groupe de Lie  $G$  dans une variété différentiable  $X$  est une application  $X \times G$  dans  $X$  notée multiplicativement*

$$(x, g) \rightarrow xg$$

$\forall g \in G, \forall x \in X$  telle que

$$x(gg') = (xg)g',$$

$$xe = x$$

où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ .

### REMARQUE

La différence entre loi d'action à gauche et loi d'action à droite est artificielle. En effet toute loi d'opération à gauche

$$(g, x) \rightarrow gx$$

donne lieu à une loi d'opération à droite

$$(x, g) \rightarrow xg$$

définie par

$$xg = g^{-1}x$$

et inversement, toute opération à droite

$$(x, g) \rightarrow xg$$

donne lieu à une loi d'opération à gauche par

$$(g, x) \rightarrow gx$$

définie par

$$gx = xg^{-1}.$$

#### 4. Fibration

**Définition 4.6** Une fibration différentiable d'espace total  $X$  et de base  $Y$  est une application différentiable

$$p : X \rightarrow Y$$

telle que

1.  $p$  est surjective
2.  $d_x(p)$  est surjective  $\forall x \in X$

**Définition 4.7** Une fibration différentiable

$$p : X \rightarrow Y$$

est localement triviale de fibre type la variété  $Z$  si tout point  $y \in Y$  possède un voisinage ouvert  $U$  tel que  $p^{-1}(U)$  est domaine d'un difféomorphisme

$$\varphi_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times Z$$

tel que

$$p(x) = p_1(\varphi_U(x))$$

où  $p_1(y, z) = y$ ,  $\forall (y, z) \in U \times Z$ .

**Définition 4.8** Le couple  $(U, \varphi_U)$  est appelé une trivialisatation de  $p$  au dessus de l'ouvert  $U$ .

Sauf mention expresse du contraire les groupes de Lie en jeu sont connexes. Une notion importante dans la théorie des connexions est celle de  $G$ -fibration principale où  $G$  est groupe de Lie. Avant d'en donner une définition on fixe le vocabulaire.

#### 5. Systèmes dynamiques abstraits.

Le vocabulaire dans les deux définitions suivantes valent pour toute loi d'action d'un groupe abstrait  $H$  dans un ensemble abstrait  $E$ .

**Définition 4.9** Soit

$$H \times E \rightarrow E$$

une loi d'opération d'un groupe abstrait  $H$  dans un ensemble  $E$  notée multiplicativement et soit  $x \in E$ .

5.1. Le sous-groupe  $H_x$  formé des  $h \in H$  tels que  $hx = x$  est appelé **sous-groupe d'isotropie** au point  $x$  (ou **sous-groupe stabilisateur** du point  $x$ ).

5.2. Le sous-ensemble  $H(x) \subset E$  formé des  $hx$ ,  $h \in H$  est appelé **l'orbite** du point  $x$  (ou **trajectoire** de  $H$  passant par le point  $x$ ).

5.3. La relation d'appartenance à la même trajectoire est une relation d'équivalence dans  $E$  dont l'espace quotient noté  $H \backslash E$  est appelé **l'espace des orbites**.

Une loi d'opération ( ou d'action ) d'un groupe  $H$  dans un ensemble  $E$  peut porter les qualificatifs qui suivent.

**Définition 4.10** Soit

$$H \times E \rightarrow E$$

une loi d'opération d'un groupe abstrait  $H$  dans un ensemble  $E$ . Notons  $e$  l'élément neutre du groupe  $H$ .

a. La loi d'action est **effective** si

$$\bigcap_{x \in E} H_x = e.$$

b. La loi d'action est **libre** quel que soit  $x \in E$  on a

$$H_x = e.$$

c. La loi d'action est **transitive** si pour un  $x \in X$  on a

$$H(x) = E.$$

d. Une action est **simplement transitive** si elle est libre et transitive.

e. Lorsque une loi  $H \times E \rightarrow E$  est transitive  $E$  est isomorphe à **l'ensemble quotient**

$$\frac{H}{H_x}.$$

f. L'ensemble quotient

$$\frac{H}{H_x}$$

est appelé **espace homogène du groupe  $H$** .

## DES EXEMPLES

(1). Un groupe possède trois lois d'opération canoniques dans lui même.

i. L'action par les translations à gauche

$$L_g : g' \rightarrow gg'.$$

ii. L'action par les translation à droite

$$R_g : g' \rightarrow g'g.$$

iii. L'action par les automorphismes intérieurs

$$Ad(g) : g' \rightarrow g^{-1}g'g.$$

Les deux premières des actions ci-dessus sont simplement transitives. En général la troisième n'est pas effective, elle n'est jamais transitive.

iv. Dans un groupe de Lie  $G$  dont l'algèbre de Lie est  $\mathfrak{G}$  toute translation à droite  $R_g$  transforme un champ invariant à gauche en un champ invariant à gauche. Il en résulte que si  $\xi \in \mathfrak{G}$

$$d(ad(g))(\xi) \in \mathfrak{G}.$$

Il s'en suit une action linéaire

$$G \times \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$$

appelée **représentation adjointe** de  $G$  dans  $\mathfrak{G}$ .

(2). Le groupe orthogonal  $SO(n+1) \subset GL(n+1, \mathbb{R})$  opère effectivement et transitivement dans la sphère unité  $S^n$ . Les sous-groupes d'isotropie sont isomorphes à  $SO(n)$ . On a donc  $S^n$  est difféomorphe à l'espace homogène

$$\frac{SO(n+1)}{SO(n)}$$

(3). L'espace projectif  $\mathbb{R}P^n$  est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 1 dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Le groupe linéaire général  $GL(n+1, \mathbb{R})$  opère transitivement dans  $\mathbb{R}P^n$ . Cette action n'est pas effective. En effet le sous-groupe  $\mathbb{R}^{n+1}$  de  $GL(n+1, \mathbb{R})$  préserve chaque sous-espace vectoriel de dimension 1.

(4). Le tore est euclidien  $\mathbb{T}^n$  est le quotient du groupe additif  $\mathbb{R}^n$  par le sous-groupe additif  $\mathbb{Z}^n$  des points à coordonnées entières.

L'action (linéaire) naturelle du  $GL(n, \mathbb{Z}) \subset GL(n, \mathbb{R})$  des matrices inversibles à coefficients entiers préserve le sous-groupe additif  $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ . Cette action passe au quotient et y définit une action libre

$$GL(n, \mathbb{Z}) \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n.$$

## 6. G-Fibration

Considérons une action à droite différentiable libre

$$E \times G \rightarrow E$$

notée multiplicativement.

**Définition 4.11** *Une fibration différentiable*

$$p : X \rightarrow Y$$

est une  $G$ -fibration localement triviale de fibre type  $E$  si tout point  $y \in Y$  possède un voisinage de trivialisatation  $U$  tel que  $p^{-1}(U)$  est domaine d'un difféomorphisme

$$\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times E$$

jouissant des propriétés suivantes :

1. Pour tout  $x \in p^{-1}(U)$  on a

$$p(x) = p_1(\varphi(x))$$

2. Si des ouverts  $U, U'$  sont des domaines de trivialisatation  $(U, \varphi), (U', \varphi')$  tels que  $U \cap U' \neq \emptyset$  alors l'application

$$g_{UU'} : U \cap U' \rightarrow \text{Diff}(E)$$

définie par

$$\varphi'(\varphi^{-1}(y, v)) = (y, v g_{UU'}(y))$$

est à valeurs dans le groupe  $G$ .

Maintenant on considère l'action d'un groupe de Lie  $G$  dans lui-même par les translations à droite.

**Définition 4.12** *Une  $G$ -fibration différentiable localement triviale*

$$p : P \rightarrow Y$$

de fibre type  $G$  est appelée fibration principale d'espace total  $P$ , de base  $Y$  et de groupe structural  $G$ .

Le quadruplet  $(P, p, Y, G)$  est appelé un  $G$ -fibré principal au dessus de  $Y$ . En fait il n'est pas trop difficile de voir que l'on a une loi d'action libre

$$P \times G \rightarrow P$$

dont l'espace des orbites  $P/G$  est la base  $Y$ .

### 4.1.1 CONNEXIONS PRINCIPALES.

#### Vocabulaires

Avant de poursuivre on va fixer le vocabulaire utilisé.

1. Un **système différentiel dans une variété**  $X$  est la donnée en tout point  $x \in X$  d'un sous-espace vectoriel  $\mathcal{D}(x)$  de l'espace vectoriel  $T_x X$  des vecteurs tangents.
2. Un système différentiel  $\mathcal{D}$  est **différentiable** si tout  $x \in X$  possède un voisinage  $U$  qui est domaine de définition d'un nombre fini de champs de vecteurs  $\xi_1, \dots, \xi_r$  qui engendrent  $\mathcal{D}$ .
3. Un système différentiel est **régulier** lorsque la dimension de  $\mathcal{D}(x)$  est indépendante de  $x \in X$ .
4. Une **variété intégrale** d'un système différentiel  $\mathcal{D}$  est une sous-variété  $Y$  de  $X$  telle que

$$T_y Y \subset \mathcal{D}(y)$$

quel que soit  $y \in Y$ . Une sous-variété intégrale est **maximale** quand elle l'est pour la relation d'inclusion.

5. Un système différentiel différentiable  $\mathcal{D}$  est **complètement intégrable** lorsque par tout point  $x \in X$  passe une sous-variété intégrale maximale  $Y$  de dimension maximale, viz

$$T_y Y = \mathcal{D}(y)$$

quelque soit  $y \in Y$  6. Un système différentiel différentiable  $\mathcal{D}$  est **involutif** (ou est en involution) lorsque l'espace vectoriel  $\Gamma(\mathcal{D})$  des ses sections différentiables est stable pour le crochet des champs de vecteurs tangents.

7. Pour les systèmes différentiels différentiables réguliers la complète intégrabilité et l'involution sont liées par le théorème de Frobenius suivant.

**Théorème 4.1** *Un système différentiel différentiable régulier est complètement intégrable si et seulement s'il est involutif.*

8. On emploiera parfois le terme **distribution** différentielle pour système différentiel différentiable en involution.

Grosso modo la géométrie des systèmes différentiels différentiables non involutifs est un objet de la théorie de contrôle géométrique. Il n'en sera pas question dans ces notes.

Soit  $G$  un groupe de Lie et  $(P, p, X, G)$  un  $G$ -fibré principal. Nous savons

que la base  $X$  de la fibration  $p$  est en fait l'espace des orbites d'une action libre

$$P \times G \rightarrow P.$$

Pour tout  $g \in G$  notons  $R_g$  le difféomorphisme de  $P$  défini par

$$P \times \{g\} \rightarrow P.$$

**Définition 4.13** Une connexion principale dans un  $G$ -fibré principal  $(P, p, X, G)$  est un système différentiel différentiable

$$y \rightarrow \mathcal{H}(y) \subset T_y P$$

jouissant des propriétés qui suivent.

$$(d_y(R_g))(\mathcal{H}(y)) = \mathcal{H}(R_g(y)).$$

$$(d_y(p)) : \mathcal{H}(y) \rightarrow T_{p(y)} X$$

est un isomorphisme linéaire.

**Définition 4.14** Le système différentiel vertical  $\mathcal{V}$  d'une fibration différentiable

$$p : P \rightarrow X$$

est le système différentiel

$$y \rightarrow \mathcal{V}(y) \subset T_y P$$

défini par

$$\mathcal{V}(y) = \ker d_y(p).$$

Le système différentiel vertical d'une fibration différentiable est régulier différentiable et involutif. Ces affirmations sont faciles à vérifier lorsque la fibration est localement triviale. Dans le cas général elles découlent du théorème des fonctions implicites.

Dans un fibré principal  $(P, p, X, G)$  toute connexion principale  $\mathcal{H}$  est un sous-fibré supplémentaire du système différentiel vertical  $\mathcal{V}$  i.e.

$$TP = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}.$$

Cette décomposition en somme directe définit le projecteur horizontal

$$h : TP \rightarrow \mathcal{H}$$

et le projecteur vertical

$$v : TP \rightarrow \mathcal{V}.$$

Comme dans un espace vectoriel on a les relations qui suivent.

$$v \circ h = 0.$$

$$h \circ v = 0.$$

$$h + v = 1.$$

Dans les membres de droite des égalités ci-dessus 0 est l'application linéaire nulle et 1 est l'application identité.

### Tenseur de courbure d'une connexion principale

Soit  $\mathcal{X}(P)$  l'espace vectoriel des champs des vecteurs tangents différentiables de la variété  $P$ .

**Définition 4.15** *Le tenseur de courbure  $curv(\mathcal{H})$  d'une connexion principale  $\mathcal{H}$  est l'application bilinéaire*

$$curv(\mathcal{H}) : \mathcal{X}(P) \times \mathcal{X}(P) \rightarrow \mathcal{V}$$

définie par

$$curv(\mathcal{H})(\xi, \zeta) = v([h(\xi), h(\zeta)]).$$

#### 4.1.2 FORMES DE CONNEXION PRINCIPALE

Soit  $(P, p, X, G)$  un fibré principal équipé d'une connexion principale  $\mathcal{H}$ . Soit  $\mathfrak{G}$  l'algèbre de Lie du groupe de Lie  $G$ . Soit  $\xi \in \mathfrak{G}$  et  $a(t) = \text{Expt}\xi \subset G$  le sous-groupe à un paramètre engendré par  $\xi$ .

#### DEBUT D'UNE LONGUE PARENTHÈSE

A l'attention d'un lecteur plus exigeant je justifie la notation  $\text{Expt}\xi$ . Pour ce faire la meilleure perspective de regard sur la structure différentiable du groupe de Lie  $G$  est sa structure fonctionnelle  $(G, \mathcal{F}(G))$ .

1. Par définition un difféomorphisme de la variété  $G$  est un automorphisme  $\theta$  de l'anneau structural  $\mathcal{F}(G)$ .

2. Par définition un champ des vecteurs tangents dans la variété  $G$  est une dérivation  $\xi$  de l'anneau  $\mathcal{F}(G)$ .

Une dérivation de l'anneau  $\mathcal{F}(G)$  est (algébriquement parlant) un automorphisme formel de l'anneau  $\mathcal{F}(X)$ . Cela signifie clairement ceci. La série formelle

$$\text{Exp}(t\xi) = \sum_0^{\infty} \frac{t^n \xi^n}{n!}$$

est un automorphisme de l'anneau  $\mathcal{F}(G)[[t]]$ .

Ainsi à tout couple  $(f, g) \in \mathcal{F}(G) \times G \subset \mathcal{F}(G)[[t]] \times G$  on associe la série numérique

$$s_t(f)(g) = \sum_0^{\infty} \frac{t^n ((\xi^n(f))(g))}{n!}.$$

Ici convergent des circonstances très favorable.

- a. La série numérique  $s_t(g)$  converge.
- b. L'argument de classe de différentiability  $f \in C^\infty(G)$  et celui de la compacité locale de  $G$  assurent la convergence uniforme dans les compacts de  $G$ .
- c. L'invariance à gauche du champ de vecteurs tangents  $\xi$  assure la convergence uniforme dans  $G$  de la série des fonctions

$$s_t(f) = \sum_0^{\infty} \frac{t^n \xi^n(f)}{n!}$$

quelque soit  $t \in \mathbb{R}$ . d. On termine par des théorèmes d'analyse un peu subtils mais classiques qui assurent que  $s_t(f) \in \mathcal{F}(G)$ .

En coordonnées locales  $x_1, \dots, x_n$ , fixons un multi-indice

$$I = (i_1, \dots, i_n)$$

sous-ensemble des nombres entiers non négatifs et soit

$$k = i_1 + \dots + i_n.$$

Les subtilités aux quelles j'ai fait allusion sont les identités

$$\sum_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} \xi^n \left( \frac{\partial^k f}{\partial x^I} \right) = \frac{\partial^k}{\partial x^I} \left( \sum_0^{\infty} \frac{t^n \xi^n(f)}{n!} \right).$$

On a évidemment les identités qui suivent.

$$s_t(ff') = s_t(f)s_t(f').$$

$$s_{t+t'}(f) = s_t(s_{t'}(f)).$$

$$s_0(f) = f.$$

Nous avons ainsi le sous-groupe à un paramètre  $s_t$  d'automorphismes

$$f \rightarrow s_t(f)$$

qui préserve le spectre de l'anneau structural  $\mathcal{F}(G)$  qui n'est pas autre chose que la variété  $G$ . On obtient un sous-groupe à un paramètre  $\phi_t$  des difféomorphismes de la variété  $G$ . Classiquement on dit que le champ des vecteurs tangents  $\xi$  est le générateur du sous-groupe à un paramètre  $\phi_t \subset \text{Diff}(G)$ .

Les trois dernières égalités montrent que le champ des vecteurs tangents  $\xi$  définit une loi d'action différentiable du groupe additif  $\mathbb{R}$  dans la variété  $G$ .

**Définition 4.16** *Le sous-groupe à un paramètre du groupe de Lie  $G$  engendré par le champ des vecteurs invariant à gauche  $\xi$  est l'orbite*

$$a(t) = \phi_t(e)$$

de l'élément neutre  $e$ .

On définit l'application exponentielle de  $\mathfrak{G}$  dans  $G$  par

$$\text{Exp}\xi = a(1).$$

**FIN DE LA LONGUE PARENTHÈSE.**

Revenons au fibré principal  $(P, p, X, G)$  équipé d'une connexion principale  $\mathcal{H}$  et à la décomposition

$$TP = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}.$$

Soit  $a(t) \subset G$  le sous-groupe à un paramètre engendré par  $\xi \in \mathfrak{G}$ . Le sous-groupe à un paramètre  $R_{a(t)}$  définit dans  $P$  un champ des vecteurs tangents vertical noté  $\tilde{\xi}$  et défini au point  $y \in P$  par la formule

$$\tilde{\xi}_y(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(R_{a(t)}(y)) - f(y)}{t}.$$

Puisque l'action de  $G$  dans la fibre  $p^{-1}(p(y))$  est simplement transitive l'application linéaire

$$\xi \rightarrow \tilde{\xi}(y)$$

est un isomorphisme linéaire de  $\mathfrak{G}$  sur  $\mathcal{V}(y)$ . Rappelons que de la décomposition

$$TP = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$$

sont issus les projecteurs horizontal  $h$  et vertical  $v$ . Ce dernier peut être canoniquement identifié à une 1-forme différentielle  $\omega$  à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{G}$ .

**Définition 4.17** *La 1-forme différentielle  $\omega$  à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{G}$  est appelée forme de connexion principale dans le fibré principal  $(P, p, X, G)$ .*

**Propriétés caractéristiques**

La 1-forme de connexion définie ci-dessus jouit des propriétés suivantes.

1. Pour tout  $\xi \in \mathfrak{G}$  on a

$$\omega(\tilde{\xi}) = \xi.$$

2. Pour tout  $g \in G$  on a

$$\omega(d_y(R_g))(\zeta(y)) = \text{Ad}(g^{-1})\omega(\zeta(y)).$$

3. Par définition le système différentiel  $\mathcal{H}$  est le noyau de la forme  $\omega$ .

Les deux propriétés 1. et 2. ci-dessus sont caractéristiques des formes de connexions principales dans le sens suivant.

**Proposition 4.2** Dans un fibré principal  $(P, p, X, G)$  le noyau d'une 1-forme différentielle

$$\omega : TP \rightarrow \mathfrak{G}$$

est une connexion principale si et seulement si  $\omega$  jouit des propriétés 1. et 2.

### Forme de courbure d'une forme de connexion principale

Considérons une structure Chern-Simons  $(P, p, X, G, \mathcal{H})$  formée d'un fibré principal  $(P, p, X, G)$  équipé d'une connexion principale  $\mathcal{H}$ . Conformément à la notation utilisée ci-dessus  $h$  est le projecteur horizontal et  $\omega$  est la forme de connexion principale de  $\mathcal{H}$ .

D'une façon générale la différentielle extérieure des formes différentielles telle qu'elle a été définie s'étend sans difficultés aux formes différentielles à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

#### Opération auxiliaire.

Il s'agit d'une opération dans les formes différentielles définies dans des structures de Chern-Simons  $(P, p, X, G, \mathcal{H})$  et à valeurs dans des espaces vectoriels de dimension finie.

Soit  $d$  la dérivation extérieure des formes différentielles définies dans la variété  $P$ .

**Définition 4.18** La dérivation covariante d'une forme différentielle définie dans  $(P, p, X, \mathcal{H})$  est l'opérateur

$$D = d \circ h.$$

Si  $\theta$  est une  $k$ -forme différentielle définie dans  $P$  et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie on a

$$D\theta(a_1, \dots, a_{k+1}) = d\theta(h(a_1), \dots, h(a_{k+1}))$$

$\forall a_1, \dots, a_{k+1} \in \mathcal{X}(P)$ .

**Définition 4.19** La forme de courbure d'une connexion principale  $\mathcal{H}$  dont la forme de connexion principale est  $\omega$  est la dérivée covariante

$$\Omega = D\omega.$$

Les équations de Maxwell en théorie de jauge est une formule liant la 2-forme de courbure  $\Omega$  à la différentielle extérieure de  $\omega$ .

Avant de donner la formule en question rappelons que l'espace vectoriel des formes différentielles à valeurs dans une algèbre de Lie  $\mathfrak{G}$  possède une structure naturelle d'algèbre de Lie graduée. Cette algèbre de Lie est graduée par les sous-espaces vectoriels  $\Omega^k(X, \mathfrak{G})$  des  $k$ -formes différentielles à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{G}$ . Le crochet

$$[,] : \Omega^k(X, \mathfrak{G}) \times \Omega^\ell(X, \mathfrak{G}) \rightarrow \Omega^{k+\ell}(X, \mathfrak{G})$$

est défini comme il suit.

$$[\alpha, \beta](\xi_1, \dots, \xi_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(k:\ell)} \text{sign}(\sigma) [\alpha(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}), \beta(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+\ell)})]$$

où  $\mathcal{S}(k : \ell)$  est le sous-ensemble des permutations  $\sigma$  de

$$\{1, \dots, k + \ell\}$$

telles

$$\sigma(1) \angle \dots \angle \sigma(k)$$

et

$$\sigma(k+1) \angle \dots \angle \sigma(k+\ell).$$

Ainsi si  $\alpha$  est une 1-forme à valeurs dans  $\mathcal{G}$  on a

$$[\alpha, \alpha](\xi, \zeta) = [\alpha(\xi), \alpha(\zeta)].$$

**Proposition 4.3** *Une 1-forme de connexion principale  $\omega$  et sa 2-forme de courbure  $\Omega$  sont liées par la formule*

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

### 4.1.3 FORMES LOCALES DE CONNEXION.

Par l'application évaluation en l'élément neutre  $e$  des champs de vecteurs dans  $G$  nous identifions l'espace vectoriel  $\mathcal{G}$  avec  $T_e G$ .

Soit  $(P, p, X, G)$  un fibré principal. Tout  $x \in X$  possède un voisinage ouvert  $U$  domaine de trivialisatation

$$\varphi_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times G.$$

Soit  $\{U_j, j \in J\}$  un recouvrement ouvert de  $X$  par des domaines de trivialisatation

$$\varphi_j : p^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times G.$$

Deux trivialisatations  $(U_j, \varphi_j), (U_i, \varphi_i)$  qui se rencontrent définissent une application différentiable

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G.$$

Ces applications satisfont les conditions suivantes

$$g_{jj} = e,$$

$$g_{ij}g_{jk}g_{kj} = e,$$

quelque soit  $i, j, k$  avec  $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ .

Chaque ouvert trivialisatation  $(U_j, \varphi_j)$  est domaine de la section

$$\sigma_j : U_j \rightarrow P$$

définie par

$$\sigma_j(x) = \varphi^{-1}(x, e).$$

L'ouvert  $U_j$  est également domaine de la 1-forme différentielle

$$\omega_j : TU_j \rightarrow \mathcal{G}$$

définie par

$$\omega_j(v_x) = \omega(d_x(\sigma)(v_x)).$$

Les 1-formes locales  $\omega_j$  et les applications locales  $g_{ij}$  sont liées par la formule **caractéristique** suivante.

Si  $U_i \cap U_j$  n'est pas vide alors on a

$$\omega_j(v_x) = \omega_i(v_x) + d_{g_{ij}(x)}(L_{g_{ij}^{-1}})((d_x g_{ij})(v_x)).$$

La formule ci-dessus est caractéristique dans le sens que la connaissance des données  $(U_j, \omega_j, g_{ij})$  reliées par cette formule détermine la forme globale de connexion principale  $\omega$ .

**Définition 4.20** *La famille  $(\omega_j)_{j \in J}$  est appelée famille des formes locales des connexions principales.*

## 4.2 CONNEXIONS DES FIBRES VECTORIELS.

Toutes les fibrations vectorielles sont différentiables et localement triviales.

Soient  $V$  et  $X$  des variétés différentiables et

$$p : V \rightarrow X$$

une fibration différentiable.

**Définition 4.21** *Le triplet  $(V, p, X)$  est une fibration vectorielle si chaque fibre  $p^{-1}(x)$  est un espace vectoriel.*

Notons  $n(x)$  la dimension de l'espace vectoriel  $p^{-1}(x)$ ;  $n(x)$  ne dépend pas de  $x \in X$ .

**Définition 4.22** *Une fibration vectorielle*

$$p : V \rightarrow X$$

*est localement triviale si tout  $x \in X$  possède un voisinage ouvert  $U$  qui est domaine d'une trivialisatation vectorielle*

$$\varphi_U : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n.$$

L'expression trivialisatation vectorielle signifie qu'en restriction aux fibres de  $p$  le difféomorphisme  $\varphi$  est linéaire.

De façon générale une section d'une fibration

$$p : V \rightarrow X$$

est une application  $s$  de  $X$  dans  $V$  telle que

$$p(s(x)) = x.$$

Du point de vue de la théorie des ensembles l'existence des sections d'une fibration est assurée par le Lemme de choix.

Les choses deviennent compliquées lorsque la topologie ou le calcul différentiel s'en mêlent.

A titre d'illustration lorsqu'on cherche des sections différentiables sans zéro d'une fibration vectorielle on se heurte à des obstructions qui viennent de l'algèbre homologique dont il sera question plus loin.

**Définition 4.23** *Un fibré vectoriel de base  $X$  et d'espace total  $V$  est une fibration vectorielle localement triviale*

$$p : V \rightarrow X.$$

L'ensemble  $\Gamma(V)$  des sections différentiables de

$$V \rightarrow X$$

est un module sur l'anneau  $C^\infty(X)$  des fonctions différentiables.

Notons  $I(x)$  l'idéal de  $C^\infty(X)$  constitué des fonctions  $f \in C^\infty(X)$  avec  $f(x) = 0$ .

Pour tout nombre entier non négatif  $k$  le sous-ensemble

$$I^k(x)\Gamma(V) = \{f\sigma, f \in I^k(x), \sigma \in \Gamma(V)\}$$

est un sous-module du  $C^\infty(X)$ -module  $\Gamma(V)$ .

Considérons le  $C^\infty(X)$ -module quotient

$$J_x^k(V) = \frac{\Gamma(V)}{I^{k+1}(x)\Gamma(V)}.$$

Les éléments de  $J_x^k(V)$  sont appelés des **jets** d'ordre  $k$  au point  $x$  des sections de  $V$ .

En coordonnées locales les éléments de  $J_x^k(V)$  sont des développements de Taylor à l'ordre  $k$  au point  $x$  des sections de  $V$ .

En posant

$$J^k(V) = \bigcup_{x \in X} J_x^k(V)$$

on a une fibration ensembliste

$$J^k(V) \rightarrow X$$

dont la fibre au dessus de  $x$  est  $J_x^k(V)$ . C'est une fibration vectorielle abstraite.

L'ensemble  $J^k(V)$  possède une unique structure de variété différentiable jouissant des propriétés qui suivent.

1. Chaque  $J_x^k(V)$  est une sous-variété fermée de  $J^k(V)$ .
2. La fibration

$$J^k(V) \rightarrow X$$

est une fibration vectorielle différentiable localement triviale.

**Définition 4.24** *Un homomorphisme de fibré vectoriel de  $(V, p, X)$  dans  $(W, q, X)$  est une application différentiable  $\psi$  de  $V$  dans  $W$  telle que*

$$q \circ \psi = p$$

et

$$\psi : p^{-1}(x) \rightarrow q^{-1}(x)$$

est une application linéaire.

L'application linéaire de

$$J_x^k(V) \rightarrow V_x$$

déterminée par l'application évaluation

$$\sigma \rightarrow \sigma(x)$$

induit un homomorphisme surjectif

$$\pi : J^k(V) \rightarrow V$$

dont le noyau  $\tilde{J}^k(V)$  est un fibré vectoriel de base  $X$ . On a la suite exacte des fibrés vectoriels de base  $X$

$$0 \longrightarrow \tilde{J}^k(V) \xrightarrow{\iota} J^k(V) \xrightarrow{\pi} V \longrightarrow 0$$

L'exactitude de la suite signifie que l'image d'une flèche coïncide avec le noyau de la flèche suivante.

#### 4.2.1 CONNEXION DE EHRESMANN DANS UN FIBRE VECTORIEL.

Sauf mention du contraire tous les fibrés vectoriels ont la même base.

**Définition 4.25** Une scission de la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\iota} T \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 0$$

est un homomorphisme de fibrés vectoriels

$$\alpha : W \rightarrow T$$

tel que

$$\pi(\alpha(w)) = w$$

quelque soit  $w \in W$ .

**Définition 4.26** Une connexion de Ehresmann dans un fibré vectoriel

$$V \rightarrow X$$

est une scission de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{J}^k(V) \xrightarrow{\iota} J^k(V) \xrightarrow{\pi} V \longrightarrow 0.$$

#### 4.2.2 CONNEXION DE KOSZUL DANS UN FIBRE VECTORIEL.

Soit

$$p : V \rightarrow X$$

une fibration vectorielle de base  $X$ . Soit

$$\alpha : V \rightarrow J^1(V)$$

une connexion de Ehresmann dans  $V$ . La scission  $\alpha$  donne naissance à un homomorphisme de fibrés vectoriels

$$\beta : J^1(V) \rightarrow \tilde{J}^1(V)$$

défini par la formule

$$\beta(\xi) = \xi - \alpha(\pi(\xi)).$$

Ainsi la connexion de Ehresmann

$$\alpha : V \rightarrow J^1(V)$$

donne naissance à la suite exacte des fibrés vectoriels suivante

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\alpha} J^1(V) \xrightarrow{\beta} \tilde{J}^1(V) \longrightarrow 0.$$

On a visiblement

$$\beta(\alpha(v)) = 0$$

quelque soit  $v \in V$ .

Soit  $\sigma$  une section du fibré vectoriel  $V$ . De  $\sigma$  on déduit la section de  $\tilde{J}^1(V)$  définie par

$$x \rightarrow \beta(J_x^1(\sigma)).$$

Exprimons ce qui précède en **coordonnées locales**.

Soit  $(x, v) \in X \times V_x$  et soit  $(U, \bar{U}) \subset X \times V$  un voisinage ouvert de  $(x, v)$  tel que  $U$  est à la fois un ouvert de trivialisatation de  $V$  et domaine des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $\bar{U}$  est un voisinage de  $v$  domaine de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ .

Exprimons la section  $\sigma$  en coordonnées  $(x, y)$ . on a

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Autrement dit au dessus de  $U$   $\sigma$  est le graphe d'une application différentiable locale de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ .

On écrit en coordonnée la section  $j^1\sigma$ . On obtient

$$j_x^1\sigma = (\sigma(x), \sigma_*(x))$$

où  $\sigma_*(x)$  est la matrice dont le coefficient  $a_{ij}$  est

$$a_{ji}(x) = \frac{\partial y_j(x)}{\partial x_i(x)}.$$

Ainsi  $\sigma_*(x)$  n'est pas autre chose que l'expression matricielle d'une application linéaire de  $T_x X$  dans  $V_x$ . Autrement dit, si  $\xi \in \mathcal{X}(X)$  alors le couple  $(\sigma, \xi)$  détermine une section de  $V$  notée  $\nabla_\xi^\sigma$  et définie par

$$(\nabla_\xi \sigma)(x) = (\beta(j_x^1\sigma))(\xi(x)).$$

En coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  on a

$$\xi(x) = \sum \xi^j(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et

$$\sigma_*(x) = \left[ \frac{\partial y^j}{\partial x_i} \right](x).$$

On a par conséquent

$$(\nabla_\xi \sigma)(x) = \sum_{i,j} \frac{\partial y^j}{\partial x_i}(x) \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial y_j}(v).$$

L'application  $\mathbb{R}$ -bilinéaire

$$\nabla : \mathcal{X}(X) \times \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V)$$

$$(\xi, \sigma) \rightarrow \nabla_\xi^\sigma$$

jouit des propriétés suivantes

$$\nabla_{f\xi}\sigma = f\nabla_{\xi}\sigma,$$

$$(\nabla_{\xi}f\sigma)(x) = (f\nabla_{\xi}\sigma)(x) + \xi_x(f)\sigma(x).$$

Inversement toute application  $\mathbb{R}$ -bilinéaire

$$\nabla : \mathcal{X}(X) \times \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V)$$

qui vérifie les 2 propriétés ci-dessus détermine une scission  $\alpha$  de la suite exacte

$$0 \rightarrow J^1(\tilde{V}) \xrightarrow{\iota} J^1(V) \xrightarrow{\pi} V \rightarrow 0.$$

En effet l'expression

$$\nabla_{\xi}f\sigma = f\nabla_{\xi}\sigma + \xi(f)\sigma$$

montre que l'application

$$\sigma \rightarrow \nabla\sigma \in \text{Hom}_{C^{\infty}(X)}(\mathcal{X}(X), \Gamma(V))$$

dépend de  $j^1\sigma$ .

On a ainsi une application

$$\beta : J_x^1(V) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_x X, V_x).$$

En identifiant l'espace vectoriel  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_x X, V_x)$  avec  $\tilde{J}_x^1(V)$  on obtient une application

$$\beta : J^1(V) \rightarrow \tilde{J}^1(V).$$

Maintenant on définit l'application

$$\alpha : V \rightarrow J^1(V)$$

en posant

$$\alpha(\sigma(x)) = J_x^1(\sigma) - \iota(\beta(J_x^1\sigma)).$$

De toute évidence on a

$$\pi(\alpha(\sigma(x))) = \sigma(x).$$

**Définition 4.27** La quantité  $\nabla_{\xi}\sigma$  est appelée dérivée covariante de  $\sigma$  dans la direction de  $\xi$ .

**Définition 4.28** L'application  $\mathbb{R}$ -bilinéaire  $\nabla$  de  $\mathcal{X}(X) \times \Gamma(V)$  dans  $\Gamma(V)$  est appelée connexion de Koszul dans  $V$ .

### 4.2.3 VARIATION SUR LA NOTION DE COURBURE.

A ce stade le lecteur sait ce qu'est le tenseur de courbure  $curv(\mathcal{H})$  d'une connexion principale  $\mathcal{H}$  et ce qu'est la 2-forme de courbure  $\Omega$  d'une 1-forme de connexion principale  $\omega$ .

Je vais définir les notions analogues pour les connexions de Ehresmann et de Koszul.

Soit  $(V, p, X)$  un fibré vectoriel de base  $X$  et soit

$$\alpha : V \rightarrow J^1(V)$$

une connexion de Ehresmann dans  $(V, p, X)$ . La scission  $\alpha$  détermine la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longleftarrow \tilde{J}^1(V) \xleftarrow{\beta} J^1(V) \xleftarrow{\alpha} V \longleftarrow 0.$$

Le projecteur  $\beta$  définit une application

$$\sigma \rightarrow \nabla \sigma$$

de  $\Gamma(V)$  dans l'espace vectoriel  $Hom(TX, V)$  des homomorphismes du fibré vectoriel de  $TX$  dans  $V$ .

Pour  $\xi(x) \in T_x X$  et  $\sigma \in \Gamma(V)$  on a

$$\nabla_{\xi} \sigma(x) = \beta(J_x^1 \sigma)(\xi_x).$$

**Définition 4.29** La courbure  $curv(\alpha)$  de la connexion de Ehresmann

$$\alpha : V \rightarrow J^1(V)$$

est l'application

$$\sigma \rightarrow curv(\alpha)$$

de  $\Gamma(V)$  dans l'espace vectoriel  $Hom(TX \times TX, V)$  définie par

$$\begin{aligned} curv_{\alpha}(\sigma)(\xi, \xi') &= \beta(j^1(\beta(j^1(\sigma))(\xi')))(\xi) \\ &\quad - \beta(j^1(\beta(j^1(\sigma))(\xi)))(\xi') \\ &\quad - \beta(J^1(\sigma))([\xi, \xi']). \end{aligned}$$

Considérons la connexion de Koszul  $\nabla$  née d'une connexion de Ehresmann

$$\alpha : V \rightarrow J^1(V).$$

Regardons la courbure  $curv(\alpha)$  de la connexion  $\alpha$  comme une application

$$\sigma \rightarrow curv(\alpha)(\sigma) \in Hom(TX \otimes TX, V).$$

Si on exprime cette courbure en terme de connexion de Koszul on obtiendra

$$(curv(\alpha)(\sigma))(\xi, \xi') = \nabla_{\xi}(\nabla'_{\xi'}(\sigma)) - \nabla'_{\xi'}(\nabla_{\xi}(\sigma)) - \nabla_{[\xi, \xi']}(\sigma).$$

On pose

$$R_{\nabla}(\xi, \xi')(\sigma) = \nabla_{\xi}(\nabla'_{\xi'}(\sigma)) - \nabla'_{\xi'}(\nabla_{\xi}(\sigma)) - \nabla_{[\xi, \xi']}(\sigma).$$

**Définition 4.30** *L'application*

$$(\xi, \xi') \rightarrow R_{\nabla}(\xi, \xi')$$

de  $TX \times TX$  dans  $\text{Hom}(V, V)$  est appelée tenseur de courbure de la connexion  $\nabla$ .

#### 4.2.4 VARIATION SUR LA NOTION DE PLATITUDE.

Je me propose d'interpréter les courbures de connexion. D'abord une définition valable pour tout type de connexion.

**Définition 4.31** *Une connexion est dite plate si sa courbure est nulle.*

Voyons la signification géométrique de la platitude d'une connexion. Soit  $(P, p, X, G, \mathcal{H})$  une structure Chern-Simons. Soit  $\omega$  la 1-forme de connexion principale qui définit  $\mathcal{H}$ .

**Proposition 4.4** *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1). *Le système différentiel  $\mathcal{H}$  est involutif.*
- (2). *Le tenseur de courbure  $\text{curv}(\mathcal{H})$  est nul.*
- (3). *La 2-forme de courbure  $\Omega$  de la 1-forme  $\omega$  est nulle.*

Soient  $(V, p, X)$  un fibré vectoriel,  $\alpha$  une connexion de Ehresmann dans  $V$  et  $\nabla$  la connexion de Koszul née de la connexion  $\alpha$ .

En vertu de la définition du tenseur de courbure de  $\nabla$ , cette dernière est plate si et seulement si  $\alpha$  est plate.

**Définition 4.32** *Un quadruplet  $(V, p, X, \alpha)$  où  $(V, p, X)$  est un fibré vectoriel muni d'une connexion plate  $\alpha$  est appelé fibré vectoriel plat.*

#### Existence des connexions.

Je n'ai pas abordé la question d'existence des connexions. Retenez que cette existence est assurée en géométrie différentielle réelle. Un outil puissant ad hoc est l'existence des partitions de l'unité différentiables. Cet outil est absent de la géométrie différentielle complexe.

On a plus frustrant, un fibré vectoriel holomorphe peut n'admettre aucune connexion holomorphe[1].

Je n'ai pas abordé des liens entre fibrés principaux et fibrés vectoriels. Le lecteur retiendra qu'à tout fibré vectoriel  $(V, p, X)$  correspond canoniquement un fibré principal qui est le fibré de ses repères linéaires. Par contre à un fibré principal  $(P, p, X, G)$  correspond plusieurs fibrés vectoriels appelés fibrés associés. Ces fibrés sont pour ainsi dire indexés par les représentations linéaires continues fidèles de groupe structural  $G$ .

## 5 TRANSPORT PARALLELE.

Soit  $(P, p, X, G)$  un fibré principal de base  $X$  et

$$c : [0, 1] \rightarrow X$$

un chemin de classe  $C^1$  par morceaux.

**Définition 5.1** *Un vecteur tangent  $\xi_y \in T_y P$  est dit vertical si*

$$d_y(p)(\xi_y) = 0.$$

**Définition 5.2** *Une  $k$ -forme  $\eta$  dans  $P$  est dite horizontale si*

$$\eta(\xi_1, \dots, \xi_k) = 0$$

dès qu'un des arguments  $\xi_j$  est vertical.

Soit  $\mathcal{H} \subset TP$  une connexion principale dans  $(P, p, X, G)$ . Les sections de  $\mathcal{H}$  sont appelées champ de vecteurs  $\mathcal{H}$ -horizontaux (ou horizontaux s'il n'y a pas risque de confusion).

**Définition 5.3** *Les courbes intégrales de classe  $C^1$  de  $\mathcal{H}$  sont appelées courbes  $\mathcal{H}$ -horizontales ou courbes horizontales tout court s'il n'y a pas risque de confusion.*

### 5.1 RELEVEMENTS HORIZONTALS DES CHEMINS DE CLASSE $C^1$ DANS $X$ .

Dans une structure de Chern-Simons  $(P, p, X, G, \mathcal{H})$  La décomposition

$$TP = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$$

assure qu'en tout  $y \in P$ ,  $d_y(p)$  induit un isomorphisme linéaire de  $\mathcal{H}_y$  sur  $T_{p(y)}X$ . Il en résulte que tout  $\xi_0 \in \mathcal{X}(X)$  détermine une section  $\xi$  de  $\mathcal{H}$  par

$$d_y(p)(\xi_y) = \xi_0(p(y)).$$

La section  $\xi$  de  $\mathcal{H}$  déterminée par  $\xi_0 \in \mathcal{X}(X)$  est appelée relèvement horizontal de  $\xi_0$ .

**Proposition 5.1** *Le relèvement horizontal  $\xi \in \Gamma(\mathcal{H})$  d'un champ de vecteurs  $\xi_0 \in \mathcal{X}(X)$  est un champ des vecteurs tangents invariant par le groupe structural  $G$ .*

La proposition résulte immédiatement de la relation

$$p \circ R_g = p$$

quel que soit  $g \in G$ . Soit  $U$  un ouvert de  $X$  sans zéro du champ de vecteurs  $\xi_0$  alors l'ouvert  $p^{-1}(U) \subset P$  ne contient aucun zéro du champ relevé  $\xi$ . Toute sous-variété intégrale de  $\xi$  se projette sur une sous-variété intégrale de  $\xi_0$ . Par tout point  $y \in p^{-1}(U)$  passe une unique sous-variété intégrale maximale  $c(t) \subset p^{-1}(U)$  du champ des vecteurs  $\xi$ .

Notons

$$c_0(t) = p(c(t)).$$

Le chemin  $c(t)$  est appelé relèvement horizontal du chemin  $c_0(t) \subset U$ .

Le passage de  $c_0(t) \subset X$  à  $c \in C^1([0, 1], P)$  n'est pas univoque.

Soit  $c_0(t) \subset X$  un chemin différentiable alors par tout point  $y \in P_{c_0(0)}(U)$  passe un unique relèvement horizontal  $c \in C^1([0, 1], P)$ .

Pour s'en assurer, on prolonge

$$\frac{dc_0(t)}{dt}$$

en un champ des vecteurs  $\xi_0$  défini dans un voisinage tubulaire du chemin  $c_0(t)$  puis on relève horizontalement la section le champ  $\xi_0$  en  $\xi \in \Gamma H$ . On a en particulier

$$d_y(p)(\xi) = \frac{dc_0(t)}{dt}.$$

Le théorème d'existence et d'unicité de solution maximale des équations différentielles ordinaires assure que par  $y \in P_{c_0(t)}$  passe une unique courbe intégrale maximale de  $\xi$ . En particulier par tout  $y \in P_{c_0(0)}$  passe un unique relèvement horizontal  $c(t) \subset P$  de  $c_0(t)$ . Ce relèvement  $c(t)$  est différentiable.

**Définition 5.4** *Le transport parallèle  $\tau$  de la fibre  $P_{c_0(0)}$  dans la fibre  $P_{c_0(1)}$  le long du chemin  $c_0(t)$  est défini par*

$$\tau(c(0)) = c(1).$$

L'unicité de relèvement horizontal passant par  $y \in P_{c_0(0)}$  montre que le transport parallèle est bijectif.

## REMARQUE

Etant donné  $c \in C^1([0, 1], X)$  l'ensemble des relèvements horizontaux de  $c$  est stable par l'action du groupe structural  $G$ . Cela assure que  $\tau$  commute avec l'action du groupe structural  $G$ .

## 5.2 REDUCTION D'HOLONOMIE.

On fixe une structure de Chern-Simons  $(P, p, X, G, \mathcal{H})$ . Soit  $(x_0, y_0) \in X \times P_{x_0} \subset X \times P$ . Notons

$$C((0, [0, 1]), (x_0, X))$$

l'ensemble des chemins différentiables d'origine  $x_0$  dans  $X$  et

$$\tilde{C}((0, [0, 1]), (y_0, P))$$

l'ensemble des relèvements horizontaux d'origine  $y_0 \in P_{x_0}$  des éléments de  $C^1((0, [0, 1]), (x_0, X))$ . Puisque  $X$  est connexe par arcs différentiable et localement connexe par arcs différentiables l'application extrémité de

$$C^1((0, [0, 1]), (x_0, X))$$

dans  $X$  qui associe à

$$c \in C^1((0, [0, 1]), (x_0, X))$$

le point  $c(1)$  est surjective.

Notons  $H(y_0)$  l'ensemble des extrémités  $c(1)$  des relèvements

$$c \in \tilde{C}^1((0, [0, 1]), (y_0, P)).$$

C'est une partie connexe par arcs différentiable de  $P$  dont la projection dans  $X$  est surjective. Examinons les fibres de la projection

$$p : H(y_0) \rightarrow X.$$

Si  $y \in P_{x_0}$  il existe un unique  $g \in G$  tel que

$$y = R_g(y_0).$$

Il est clair que le sous-ensemble des  $g \in G$  tels que

$$R_g(H(y_0)) = H(y_0)$$

est un sous-groupe de  $G$  noté  $\mathbb{H}(y_0)$ .

Par ailleurs le transport parallèle le long des  $c \in C((0, [0, 1]), (x_0, X))$  préserve  $H(y_0)$ . Puisque les  $R_g$  commutent avec le transport parallèle le long des chemins  $c \in C((0, [0, 1]), (x_0, X))$  chaque fibre de  $H(y_0) \rightarrow X$  est isomorphe à  $\mathbb{H}(y_0)$ .

Grosso modo, avec un peu plus de travail de précision, on vérifie que

$$(H(y_0), p, X, \mathbb{H}(y_0))$$

est un fibré principal.

**Définition 5.5** *Le sous-fibré  $(H(y_0), p, X, \mathbb{H}(y_0))$  est appelé réduction (ou fibré) d'holonomie passant par  $y_0$  de la connexion principale  $\mathcal{H}$ .*

**Définition 5.6** *Le sous-groupe  $\mathbb{H}(y_0)$  est appelé groupe d'holonomie de la connexion principale  $\mathcal{H}$ .*

Pour tout  $g \in G$  on a

$$R_g \tilde{C}((0, [0, 1]), (y_0, P)) = \tilde{C}((0, [0, 1]), (R_g(y_0), P))$$

et

$$\mathbb{H}(R_g(y_0)) = g\mathbb{H}(y_0)g^{-1}.$$

**Proposition 5.2** *A conjugaison près le sous-groupe d'holonomie est indépendant du choix de  $y_0$ .*

**Théorème 5.3** *Soit  $\mathcal{H}$  une connexion principale dans  $(P, p, X, G)$  et  $\omega$  la 1-forme de connexion déterminée par  $\mathcal{H}$ . On a les propriétés suivantes.*

1. *L'espace tangent vertical  $\mathcal{V}(H(y_0))$  est engendré par les valeurs du tenseur de courbure  $\text{curv}(H)(\xi, \xi')$ .*
2. *La composante neutre du sous-groupe  $\mathbb{H}(y_0)$  est un sous-groupe de Lie du groupe structural  $G$  dont l'algèbre de Lie  $\mathcal{A}(y_0)$  est engendrée par les images  $\Omega(\xi, \xi')$  de la forme de courbure.*

## REMARQUE

L'assertion 2 est le classique théorème d'Ambrose-Singer

## 6 CONNEXIONS LINEAIRES

Je vais m'intéresser un peu plus aux fibrés vectoriels des vecteurs tangents des variétés.

Sans mention expresse du contraire la perspective de regard est celle des paramétrisations.

Soit  $X$  une variété différentiable de dimension  $n$  dont la structure différentiable est déterminée par une paramétrisation complète

$$(X, \Phi) = \bigcup_{x \in X} (\Phi_x, X).$$

Tous les objets considérés dans la suite sont différentiables.

Soient

$$c, c' : (0, [-1, 1]) \rightarrow (0, \mathbb{R}^n).$$

Pour tout  $\varphi \in \Phi_x$  des courbes paramétrées ayant le même germe au point  $0 \in [-1, 1]$ . Les chemins

$$\varphi \circ c, \varphi \circ c' : (0, [-1, 1]) \rightarrow (x, X)$$

définissent le même germe des courbes paramétrées au point  $0 \in [-1, 1]$ .

Par définition nous avons en fait identifié les notions de vecteur tangent avec celle de germes des chemins différentiables.

La dérivé au point  $0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_0(\varphi)$  d'une paramétrisation  $\varphi$  est l'application linéaire définie par

$$d_0(\varphi)([c]_0) = [\varphi \circ c]_0$$

L'application  $d_0(\varphi)$  est un isomorphisme linéaire de  $T_0\mathbb{R}^n$  sur  $T_xX$ .

**Définition 6.1** Pour  $\varphi \in \Phi_x$  l'application linéaire  $d_0(\varphi)$  est appelée un repère linéaire au point  $x$  de la variété  $X$ .

On dit aussi que  $d_0(\varphi)$  est un repère linéaire d'origine  $x$ .

Soit  $\text{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$  le groupe des difféomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  qui fixe l'origine. C'est le groupe d'isotropie au point  $0 \in \mathbb{R}^n$  du groupe  $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$  des difféomorphismes de  $\mathbb{R}^n$ .

Puisque la paramétrisation  $\Phi$  est complete, le groupe  $\text{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$  opère à droite dans  $\Phi$  par

$$(\varphi\gamma)(v) = \varphi(\gamma(v))$$

quelque soit  $(\varphi, \gamma) \in \Phi \times \text{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$ . Cette action préserve chaque sous-ensemble  $\Phi_x$ .

Pour  $\gamma \in \text{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$   $d_0(\gamma)$  est un élément du groupe  $GL(\mathbb{R}^n)$  des automorphismes linéaires de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ .

Pour  $(\varphi, \gamma) \in \Phi_x \times \text{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$  la relation

$$d_0(\varphi\gamma) = d_0(\varphi)d_0(\gamma)$$

montre que le groupe linéaire  $GL(\mathbb{R}^n)$  opère à droite dans l'ensemble

$$\mathcal{R}_x^1(X) = [d_0(\Phi_x)]$$

des repères linéaires d'origine  $x \in X$ . Cette action est simplement transitive. Soit

$$\mathcal{R}^1(X) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{R}_x^1(X).$$

Notons  $p$  l'application origine de repère linéaire de  $\mathcal{R}^1(X)$  sur  $X$ . On obtient ainsi une fibration (ensembliste)  $(\mathcal{R}^1(X), p, X)$  dont les fibres  $\mathcal{R}_x^1(X)$  sont des variétés différentiables.

Il existe une unique structure de variété différentiable dans  $\mathcal{R}^1(X)$  qui rend différentiable la projection  $p$ . La variété  $X$  devient l'espace des orbites de l'action de  $GL(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{R}^1(X)$ .

Que le quadruplet  $(\mathcal{R}^1(X), p, X, GL(\mathbb{R}^n))$  soit un fibré principal de base  $X$  et de groupe structural  $GL(\mathbb{R}^n)$  découle du fait que chaque paramétrisation

$$\varphi : (0, \mathbb{R}^n) \rightarrow (x, X)$$

en détermine la trivialisaton (ou section)  $(\varphi, d_0(\varphi))$ .

**Définition 6.2** *Le fibré principal  $(\mathcal{R}^1(X), p, X, GL(\mathbb{R}^n))$  est appelé le fibré de repères linéaires d'ordre 1 de  $X$ .*

Chaque fibre  $\mathcal{R}_x^1(X)$  a deux composantes connexes. Notons  $GL_+(\mathbb{R}^n)$  la composante neutre de  $GL(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 6.3** *Une connexion principale dans  $(\mathcal{R}^1(X), p, X, GL(\mathbb{R}^n))$  est appelée connexion linéaire dans  $X$ .*

### 6.0.1 FORME FONDAMENTALE ET FORME DE TORSION D'UNE CONNEXION LINEAIRE

Le fibré principal des repères linéaires  $(\mathcal{R}^1(X), p, X, GL(\mathbb{R}^m))$  possède une 1-forme fondamentale  $\theta$  qui est à valeurs dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^m$ . C'est une forme différentielle de type identité. Cette dernière notion signifie que pour couple  $(r, g) \in \mathcal{R}^1(X) \times GL(\mathbb{R}^m)$  on a

$$\theta \circ d_r(R_g) = g^{-1} \circ \theta_r.$$

**Définition 6.4** *La forme fondamentale est*

$$\theta_r(\zeta) = r^{-1}(d_r(p)(\zeta)).$$

Le groupe structural  $GL(\mathbb{R}^m)$  opère naturellement dans  $\mathbb{R}^m$ . Un calcul direct (simple) montre que pour tout  $g \in GL(\mathbb{R}^m)$  on a la formule

$$\theta_{rg}(d_r(R_g)(\zeta)) = g^{-1}(\theta_r(\zeta)).$$

Soit  $\mathcal{H}$  une connexion principale dans  $(\mathcal{R}^1(X), p, X, GL(\mathbb{R}^m))$  et soit

$$D = d \circ h$$

la dérivation covariante associée à  $\mathcal{H}$ .

**Définition 6.5** La 2-forme de torsion de la connexion  $\mathcal{H}$  est définie par

$$\Theta = D\theta$$

Il est facile de vérifier que la 2-forme de torsion d'une connexion linéaire est de type identité, c'est à dire que pour tout  $g \in GL(\mathbb{R}^m)$  on a

$$\Theta \circ dR_g = g^{-1}\Theta.$$

### Torsion d'une connexion de Koszul.

Je signalerai plus loin les connections entre diverses expressions de connexions. J'allumerai en particulier sur le pont qui relie le monde des connexions principales  $\mathcal{H} \subset T\mathcal{R}^1(X)$  à celui des connexions de Koszul dans le fibré tangent  $TX$ .

**Définition 6.6** Le tenseur de torsion  $T_\nabla$  d'une connexion de Koszul  $\nabla$  définie dans le fibré vectoriel  $TX$  des vecteurs tangents à une variété  $X$  est défini par

$$T_\nabla(\xi, \zeta) = \nabla_\xi \zeta - \nabla_\zeta \xi - [\xi, \zeta].$$

Il est opportun de donner une signification algébrique à cette application  $\mathcal{F}(X)$ -bilinéaire du  $\mathcal{F}(X)$ -module  $\mathcal{X}(X)$  dans lui même.

La meilleure perspective ici est celle d'espace fonctionnel. Sous cette perspective l'espace vectoriel  $\mathcal{X}(X)$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $Hom_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$ .

Ce dernier espace vectoriel est un anneau associatif dont le produit est la composition d'application

$$(\xi, \zeta) \rightarrow \xi \circ \zeta.$$

Le sous-espace

$$\mathcal{X}(X) \subset Hom_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$$

n'est pas stable pour la composition d'application par contre il est stable pour la structure d'algèbre de Lie des commutateurs de l'algèbre associative  $Hom_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$ . Ce qui précède veut dire que pour  $\xi, \zeta \in \mathcal{X}(X)$  l'application

$$(\xi, \zeta) \rightarrow [\xi, \zeta] = \xi \circ \zeta - \zeta \circ \xi$$

fait de  $\mathcal{X}(X)$  une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des commutateurs de  $Hom_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$ .

Le problème résolu par Koszul est de définir dans  $\mathcal{X}(X)$  une structure de  $\mathbb{R}$ -algèbre

$$(\xi, \zeta) \rightarrow \nabla(\xi, \zeta)$$

dont la structure d'algèbre des commuateurs

$$(\xi, \zeta) \rightarrow [\xi, \zeta]_{\nabla} = \nabla(\xi, \zeta) - \nabla(\zeta, \xi)$$

soit la même que celle provenant de la composition d'applications linéaires c'est à dire

$$\nabla(\xi, \zeta) - \nabla(\zeta, \xi) = \xi \circ \zeta - \zeta \circ \xi.$$

La première obstruction à ce dessein est l'application

$$T_{\nabla} : (\xi, \zeta) \rightarrow [\xi, \zeta]_{\nabla} - \xi \circ \zeta + \zeta \circ \xi$$

C'est à dire la torsion de  $\nabla$ .

## 6.0.2 STRUCTURES GEOMETRIQUES.

Rappelons qu'une réduction d'un fibré principal  $(P, p, X, G)$  est un fibré principal  $(Q, p, X, K)$  dont l'espace total  $Q$  est une sous-variété de  $P$  et  $K$  est un sous-groupe de Lie de  $G$  en outre l'application inclusion

$$(Q, p, X, K) \subset (P, p, X, G)$$

est un homomorphisme de fibré principal.

On dira que  $(Q, p, X, K)$  est une  $K$ -réduction de  $(P, p, X, G)$

**Définition 6.7** Une structure géométrique d'ordre 1 dans  $X$  est une réduction du fibré  $(\mathcal{R}^1(X), p, X, GL(\mathbb{R}))$ .

Soit  $K$  un sous-groupe de Lie de  $GL(\mathbb{R}^n)$ , pour être bref une  $K$ -réduction de  $\mathcal{R}^1(X)$  est appelée  $K$ -structure dans  $X$ .

### EXEMPLES de structures géométriques.

1. Une variété  $X$  est dite orientable lorsque  $(\mathcal{R}^1(X), p, X, GL(\mathbb{R}^n))$  possède une réduction  $GL_+(\mathbb{R}^n)$ -réduction).
2. Toute connexion linéaire dans  $X$  génère des réductions d'holonomie.
3. Une  $\mathcal{O}(n)$ -structure dans  $X$  est une structure de variété riemannienne dans  $X$ .
4. Une  $SL(n, \mathbb{R})$ -structure dans  $X$  est une structure de variété orientée.
5. Un automorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $\mathbb{C}^m$  est une matrice carrée inversible  $[c_{ij}]$ ,  $1 \leq i, j \leq m$  dont les coefficients  $c_{ij}$  sont des nombres complexes. On regarde  $\mathbb{C}^m$  comme l'espace vectoriel réel

$$\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m.$$

Le groupe linéaire  $G_{\mathbb{C}} = GL(\mathbb{C}^m)$  est alors un sous-groupe du groupe linéaire général  $GL(\mathbb{R}^{2m})$ . Soit  $X$  une variété de dimension  $2m$ .

Une  $G_{\mathbb{C}}$ -réduction de  $(\mathcal{R}^1(X), p, X, GL(\mathbb{R}^{2m}))$  est une famille différentiable des structures de  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $(T_x X, x \in X)$ .

### 6.0.3 REPERES ET STRUCTURES GEOMETRIQUES D'ORDRE SUPERIEUR.

Nous sommes toujours sous la perspective des structures différentiables définies par des paramétrisations complètes  $(X, \Phi)$ . A cet égard l'application identité est notée 1 quand il n'y a pas risque de confusion.

On fixe un nombre entier positif  $k$  et on définit dans chaque  $\Phi_x$  la relation d'équivalence suivante.

**Définition 6.8** Deux paramétrisations  $\varphi, \psi \in \Phi_x$  sont équivalentes à l'ordre  $k$  si

$$j_0^k(\varphi^{-1}\psi - 1) = 0.$$

L'application  $\varphi^{-1}\psi - 1$  est considérée comme une section du fibré trivial

$$E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{p_1} \mathbb{R}^n$$

avec  $p_1(v, w) = v$ .

La classe d'équivalence de  $\varphi$  est notée  $j_0^k\varphi$ .

**Définition 6.9** Soit  $\varphi \in \Phi_x$ ; la classe d'équivalence  $j_0^k\varphi$  est appelé repère linéaire d'ordre  $k$  de  $X$  d'origine  $x$ .

L'ensemble des repères linéaires d'ordre  $k$  d'origine  $x$  et le fibré abstrait des repères linéaires d'ordre  $k$  de  $X$  sont notés respectivement

$$\mathcal{R}_x^k(X) = J^k(\Phi_x),$$

$$\mathcal{R}^k(X) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{R}_x^k(X).$$

Dorénavant j'identifie chaque  $\varphi \in Diff(\mathbb{R}^n)$  avec son graphe

$$v \rightarrow (v, \varphi(v)).$$

Dès lors le groupe  $Diff(\mathbb{R}^n)$  est un sous-ensemble du  $\mathcal{F}(X)$ -module  $\Gamma(E)$  des sections du fibré vectoriel

$$E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{p_1} \mathbb{R}^n.$$

Notons  $\Pi^k(\mathbb{R}^n)$  l'image de  $Diff(\mathbb{R}^n)$  par la projection canonique

$$\Gamma(E) \rightarrow J^k(E).$$

L'image de  $Diff_0(\mathbb{R}^n) = Diff((0, \mathbb{R}^n))$  par cette projection canonique est noté  $GL_k(\mathbb{R}^n)$ .

Bien que ce dernier ne soit pas un espace vectoriel il est gradué comme il suit

$$GL_k(\mathbb{R}^n) = GL(\mathbb{R}^n) + \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) + \dots + \mathcal{S}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

où  $\mathcal{S}^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  est l'espace vectoriel des applications  $j$ -multi-linéaires symétriques de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Chaque espace vectoriel  $\mathcal{S}^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  est un module de  $GL(\mathbb{R}^n)$  sous l'action à gauche suivante. Soit  $\sigma \in \mathcal{S}^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  et  $g \in GL(\mathbb{R}^n)$  l'élément  $g \cdot \sigma \in \mathcal{S}^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  est défini par

$$(g \cdot \sigma)(v_1, \dots, v_j) = g(\sigma(g^{-1}(v_1), \dots, g^{-1}(v_j)))$$

quels que soient  $v_1, \dots, v_j \in \mathbb{R}^n$ .

Tout élément de  $GL_k(\mathbb{R}^n)$  s'écrit

$$\gamma = (g, \sigma) \in GL(\mathbb{R}^n) \times \sum_2^k \mathcal{S}^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

On munit  $GL_k(\mathbb{R}^n)$  de la structure de groupe dont la loi de composition interne est définie comme il suit.

$$(g, \sigma)(g', \sigma') = (gg', \sigma + g \cdot \sigma').$$

On obtient ainsi un sous-groupe du groupe affine de l'espace vectoriel

$$\sum_2^k \mathcal{S}^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Retournons à la relation d'équivalence dans les  $\Phi_x$ . Les paramétrisations  $\varphi, \psi \in \Phi_x$  sont équivalentes si  $(\varphi^{-1}\psi - 1) \in I_0^{k+1}(\mathbb{R}^n)\Gamma(E)$ . Autrement dit

$$j_0^k(\varphi) = j_0^k(\psi).$$

Cette relation est compatible avec la structure de groupe de  $Diff_0(\mathbb{R}^n)$ . Pour s'en convaincre il suffit d'appliquer la formule des développements limités. En fait lorsque  $\varphi$  et  $\psi$  sont équivalents on a

$$\psi(x) = \varphi(x) + o(\|x\|^k).$$

Il en découle que  $J_0^k(Diff_0(\mathbb{R}^n))$  hérite d'une structure de groupe. Cette structure de groupe n'est pas autre chose que la structure de groupe affine de

$$GL(\mathbb{R}^n) + \sum_2^k \mathcal{S}^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

qui a été décrite plus haut.

De l'action à droite de  $Diff_0(\mathbb{R}^n)$  dans  $\Phi$  résulte une action à droite de  $GL_k(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{R}^k(X)$ .

En effet soit  $(\sigma, \varphi) \in Diff_0(\mathbb{R}^n) \times \Phi_x$ . Nous posons

$$g = j_0^k \sigma,$$

$$r_x = j_0^k \varphi.$$

On en tire par définition

$$r_x g = j_0^k(\varphi \circ \sigma).$$

**Exercice.**

Montrer que cette action

$$\mathcal{R}_x^k(X) \times GL_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{R}_x^k(X) \text{ est simplement transitive.}$$

Les fibres de la fibration abstraite

$$\mathcal{R}^k(X) \rightarrow X$$

des variétés isomorphes au groupe de Lie  $GL_k(\mathbb{R}^n)$ . Il existe une topologie dans l'espace total qui en fait un  $GL_k(\mathbb{R}^n)$ -fibré principal.

**Définition 6.10** *Le sous-groupe affine  $GL_k(\mathbb{R}^k)$  est appelé groupe linéaire d'ordre  $k$ .*

*Le quadruplet  $(\mathcal{R}^k(X), p, X, GL_k(\mathbb{R}^n))$  est appelé fibré des repères linéaires d'ordre  $k$  de  $X$ .*

**STRUCTURES GEOMETRIQUES D'ORDRE  $k$ .**

**Définition 6.11** *Une structure géométrique d'ordre  $k$  est une réduction du fibré principal des repères d'ordre  $k$  de  $X$ .*

Avant de poursuivre je signale que le moment est venu de mettre en lumière l'importance d'adopter une perspective qui sied à chaque type de problème d'Analyse, de géométrie ou de Topologie dans une variété différentiable.

Soit  $X$  une variété de dimension  $n$  dont la structure différentiable est définie par une paramétrisation complète

$$\Phi = \bigcup_{x \in X} \Phi_x.$$

Soit  $\mathcal{G}^k$  un sous-groupe de Lie du groupe affine  $GL_k(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 6.12** *Une  $\mathcal{G}^k$ -réduction de la paramétrisation  $\Phi$  est une sous-paramétrisation*

$$\tilde{\Phi} \subset \Phi$$

*jouissant de la propriété suivante quels que soient  $\varphi, \psi \in \tilde{\Phi}_x$  on a*

$$j_0^k(\varphi^{-1} \circ \psi) \in \mathcal{G}^k.$$

J'énonce sous la forme de proposition un exercice dont la résolution est facile.

**Proposition 6.1** *Soit  $X$  une variété de dimension  $n$  dont la structure différentiable est définie par une paramétrisation complète  $(X, \Phi)$  et  $\mathcal{G}^k$  un sous-groupe de Lie de  $GL_k(\mathbb{R}^n)$ . Toute  $\mathcal{G}^k$ -réduction de  $(X, \Phi)$  définit une  $\mathcal{G}^k$ -réduction  $\mathcal{R}_{\mathfrak{g}}^k$  de  $(\mathcal{R}^k(X), p, X, GL_k(\mathbb{R}^n))$ . La réciproque est génériquement fausse.*

### Alerte

**Savoir Quand la réciproque de cette proposition est vrai** est la question fondamentale dans les domaines suivants.

- (1). Analyse globale sur les variétés.
- (2). Géométrie des systèmes d'équations aux dérivées partielles.
- (3). La géométrie différentielle des opérateurs différentiels.

La contribution majeure dans ces trois domaines est la découverte par D. Spencer des complexes de cohomologie qui portent son nom (voir plus loin dans ces notes.)

Parcequ'ils situent où habitent les obstructions et combien sont-elles, les complexes de Spencer fournissent des critères de réponses formelles. Ils permettent ainsi le passage du Temoin à l'Analyse classique.

Je puis en signaler deux illustrations.

- (a). Dans le cas  $n = 2, k = 1$  et  $\mathcal{G}^1 = \mathbb{C}^* \subset GL(\mathbb{R}^2)$ , la réciproque de la proposition est vraie.
- (b) Dans le  $k = 1$  si la réciproque de la proposition est vraie avec  $\mathcal{G}^1 = SO(n)$  alors revêtement fini près la variété  $X$  est le produit direct de tore euclidien par un espace euclidien. La décision dépend du premier nombre de Betti.

**Définition 6.13** *Une connexion principale dans  $(\mathcal{R}^1(X), p, X, GL_k(\mathbb{R}^n))$  est appelée connexion linéaire d'ordre  $k$  dans  $X$ .*

### 6.0.4 CONNEXIONS D'ORDRE SUPERIEUR DANS LES FIBRES VECTORIELS.

Soit  $(V, p, X)$  un fibré vectoriel de base  $X$ . Soit  $J^k(V)$  le fibré des  $k$ -jets des sections de  $V$ . On note  $\pi_k$  l'homomorphisme projection de  $J^k(V)$  sur  $V$ . Notons  $\tilde{J}^k(V)$  le noyau de  $\pi_k$  et considérons la suite exacte des fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \tilde{J}^k(V) \xrightarrow{\iota} J^k(V) \xrightarrow{\pi_k} V \longrightarrow 0$$

**Définition 6.14** *Une connexion de Ehresmann d'ordre  $k$  dans  $V$  est une scission*

$$V \xrightarrow{\alpha} J^k(V)$$

de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{J}^k(V) \xrightarrow{\iota} J^k(V) \xrightarrow{\pi_k} V \longrightarrow 0.$$

Le lecteur est maintenant en mesure de visiter le vaisseau qui relie l'univers des connexions principales à ceux des connexions de Ehresmann et des connexions de Koszul. En voici le tarif.

**Théorème 6.2** *Tout repère linéaire d'ordre  $k$   $r_x \in \mathcal{R}_x^k(X)$  détermine un isomorphisme linéaire  $\theta(r_x)$  de  $J_x^k(TX)$  dans  $T_{r_x}\mathcal{R}^k(X)$*

### Esquisse de démonstration

Soit  $\xi$  un champ de vecteurs sur  $X$  défini dans un voisinage  $U$  d'un point  $x \in X$ . Soit  $\psi_t$  le flot local de  $\xi$ . On suppose que ce flot est défini dans  $I \times U$ , où  $I$  est un voisinage ouvert de l'origine de  $\mathbb{R}$ .

Notons

$$\Phi_U = \bigcup_{x \in U} \Phi_x.$$

Le flot  $\psi_t$  opère à gauche dans  $\Phi_U$  par

$$\varphi \rightarrow \psi_t \circ \varphi.$$

On a

$$d_0(\psi_t \circ \varphi) = (d_{\varphi(0)}(\psi))d_0(\varphi).$$

Choisissons  $\varphi \in \Phi_x$  tel que  $d_0(\varphi) = r_x$ , et considérons le chemin différentiable

$$t \rightarrow c(t) = (d_x(\psi_t))r_x.$$

Le chemin  $c(t)$  habite  $\mathcal{R}^k(X)$ . Posons

$$c(t) = \tilde{\psi}_t(r_x)$$

Si  $t, t', t + t' \in I$  la relation

$$\psi_{t+t'} = \psi_t \circ \psi_{t'}$$

entraîne

$$\tilde{\psi}_{t+t'}(r_x) = \tilde{\psi}_t(\tilde{\psi}_{t'}(r_x)).$$

On définit  $\theta(r_x)(j_x^k \xi) \in T_{r_x}\mathcal{R}^k(X)$  par la formule suivante.

$$(\theta(r_x)(j_x^k \xi))(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\tilde{\psi}_t(r_x)) - f(r_x))$$

$f \in C^\infty(\mathcal{R}^k(X))$ . L'application  $\theta(r_x)$  est linéaire et injective. Puisque  $J_x^k(TX)$  et  $T_{r_x}\mathcal{R}^k(X)$  ont la même dimension finie  $\theta(r_x)$ , est un isomorphisme.

Considérons la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \tilde{J}^k(TX) \xrightarrow{\iota} J^k(TX) \xrightarrow{\pi_k} TX \longrightarrow 0.$$

Une connexion de Ehresmann

$$TX \xrightarrow{\alpha} J^k(TX)$$

génère la suite exacte

$$0 \longleftarrow \tilde{J}_x^k(TX) \xleftarrow{\beta} J_x^k(TX) \xleftarrow{\alpha} T_x X \longleftarrow 0.$$

On sait que le fibré  $\tilde{J}_x^k(TX)$  est l'espace des applications polynômiales de  $T_x X$  dans  $T_x X$ .

## REMARQUES

Pour tirer profit des isomorphismes  $\theta(r_x)$  il est utile de faire les observations suivantes.

1. L'isomorphisme  $\theta(r_x)$  envoie  $\tilde{J}_x^k(TX)$  sur l'espace vertical  $\mathcal{V}(r_x) \subset T_{r_x} \mathcal{R}^k(X)$ . Par conséquent l'image

$$\mathcal{H}(r_x) = \alpha(T_x X) \subset J_x^k(TX)$$

est un supplémentaire de  $\mathcal{V}(r_x)$ . Autrement dit on

$$T_{r_x} \mathcal{R}^k(X) = \mathcal{V}(r_x) \oplus \mathcal{H}(r_x).$$

2. En fait on a

$$d_{r_x}(p)(\theta(r_x)(j_x^k \xi)) = \pi_k(j_x^j \xi) = \xi(x).$$

**Lemme 6.3** *Pour  $g \in GL(\mathbb{R}^n)$  on a  $H(R_g(r_x)) = R_{g*}(H_{r_x})$*

## Indication

Le lemme dit que l'on a

$$\theta(R_g(r_x)) = d(R_g)\theta(r_x).$$

Soient  $\sigma \in \text{Diff}_0(\mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in \Phi_x$  tels que

$$d_0(\varphi) = r_x.$$

On voit alors que  $\psi_t \circ \varphi \circ \sigma$  est une paramétrisation de  $X$  au point  $\psi_t(x)$  et que l'on a

$$d_0(\psi_t \varphi \sigma) = (d_x(\psi_t)R_g(r_x)) = R_g d(\psi_t)(r_x).$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
(\theta(R_g r_x)(j_x^1 \psi))(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\psi_{*t} R_g(r_x)) - f(R_g(r_x))) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(R_g \psi_{*t}) - f(R_g(r_x))) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((f \circ R_g)(\psi_{*t} r_x) - (f \circ R_g)(r_x)) \\
&= (\theta(r_x)(J_x^1 \xi))_{r_x} (f \circ R_g) \\
&= ((R_g)_{*r_x}(\theta(r_x)(J_x^1 \xi)))(f).
\end{aligned}$$

Il en résulte l'application

$$r_x \rightarrow \theta(r_x)$$

qui satisfait la condition

$$\theta(R_g r_x) = dR_g \theta(r_x).$$

**Corollaire 6.4** *L'application  $r_x \rightarrow \mathcal{H}(r_x)$  est une connexion principale dans le fibré  $(\mathcal{R}^k(X), p, X, GL_k(\mathbb{R}^n))$ .*

On peut exprimer les considérations discutées ci-dessus sous la forme des 2 diagrammes commutatifs suivants.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{R}^k(X) & \xleftarrow{p} & T_r(\mathcal{R}^k(X)) & \xrightarrow{R_g^*} & T_{R_g(r)}(\mathcal{R}^k(X)) \\
\uparrow r & & \uparrow \theta(r) & & \uparrow \theta(R_g(r)) \\
X & \xleftarrow{\quad} & J^k(TX) & \xrightarrow{id} & J^k(TX)
\end{array}$$

où  $r$  est une section du fibré principal  $(\mathcal{R}^k(X), p, X, GL_k(\mathbb{R}^n))$ .

Le lecteur est maintenant à mesure de tirer au clair les liens intimes entre diverses notions de connexion qui ont été décrites.

Pour tout couple

$$(r, \xi) \in \Gamma(\mathcal{R}^k(X)) \times \Gamma(TX)$$

on a les identifications canoniques suivantes :

$$\mathcal{V}_{r_x}(\mathcal{R}^k(X)) \cong \tilde{J}_x^k(TX) \cong \mathfrak{G}_k \ell(T_x X).$$

L'espace vectoriel  $\mathfrak{G}_k \ell(T_x X)$  est l'algèbre de Lie de  $GL_k(T_x X)$ .

On a défini la connexion de Koszul  $\nabla$  par

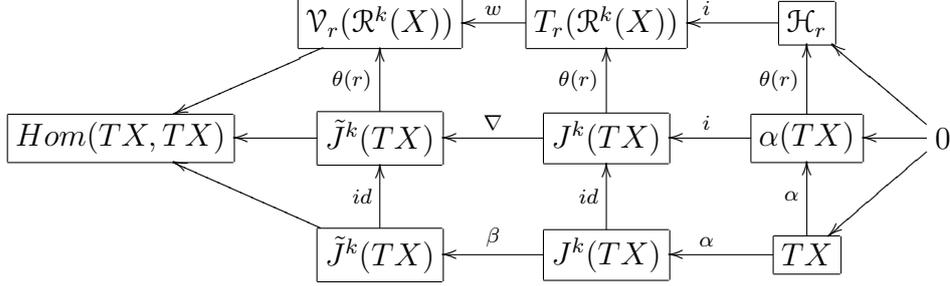
$$(\nabla \xi)_x = \beta(J_x^k \xi) \in \tilde{J}_x^k(TX).$$

Modulo les identifications opérées ci-dessus, la forme de connexion principale n'est pas autre chose que la projection verticale

$$T\mathcal{R}^k(X) \rightarrow \mathcal{V}(\mathcal{R}^k(X))$$

parallèlement au sous-espace vectoriel  $\mathcal{H} \subset T\mathcal{R}^k(X)$ .

Les connections entre diverses variantes de la notion de connexion sont mises en évidence par le diagramme commutatif suivant :



### 6.0.5 STRUCTURES GEOMETRIQUES BIS

On a déjà défini une structure géométrique d'ordre  $k$  dans  $X$  comme étant une réduction du fibré principal  $(\mathcal{R}^k(X), p, X, GL_k(\mathbb{R}^n))$ .

Les structures géométriques d'ordre  $k$  sont des solutions des SEDP d'ordre  $k$  (ou si l'on veut, des jets intégraux des opérateurs différentiels). La géométrie différentielle d'ordre supérieur est donc intimément liée à la géométrie des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Soit  $G$  un sous-groupe de Lie de  $GL_k(\mathbb{R}^n)$ . Considérons l'action à droite de  $G$  dans  $\mathcal{R}^k(X)$  obtenue par restriction de celle de  $GL_k(\mathbb{R}^n)$ . On sait que cette action est libre. Soit  $\mathcal{R}^k(X)/G$  l'espace des orbites muni de la topologie quotient. Ainsi  $U \subset \mathcal{R}^k(X)/G$  est un ouvert si et seulement si  $\pi^{-1}(U)$  est un ouvert de  $\mathcal{R}^k(X)$  où  $\pi$  est la projection canonique

$$\mathcal{R}^k(X) \rightarrow \mathcal{R}^k(X)/G.$$

**Proposition 6.5** *L'ensemble des réductions  $(P, p, X, G)$  de*

$$(\mathcal{R}^k(X), p, X, GL_k(\mathbb{R}^n))$$

*est en correspondance bijective avec l'ensemble des sections continue de  $\pi$ .*

**Une mise en garde utile.**

Soit  $G$  un sous-groupe de Lie de  $GL_k(\mathbb{R}^n)$ . Un fibré principal  $(P, p, X, G)$  n'est pas forcément une structure géométrique d'ordre  $k$ .

Parmi les fibrés principaux dont le groupe structural est  $G$  ceux qui sont des structures géométriques sont caractérisés par l'existence d'une 1-forme fondamentale  $\theta$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et vérifiant la condition

$$\theta_{R_g(y)}(dR_g(v_y)) = g^{-1}(\theta_y(v_y))$$

quels que soient  $y \in P$ ,  $v_y \in T_yP$ .

## 6.0.6 ANALYSE GLOBALE.

**Définition 6.15** Une structure géométrique d'ordre  $k$

$$(P, p, X, G) \subset (\mathcal{R}^k(X), p, X, GL_k(\mathbb{R}^n))$$

est dite plate si elle a la forme  $\mathcal{R}_{\tilde{\Phi}}^k$  où  $(\tilde{\Phi}, X) \subset (\Phi, X)$  est  $G$ -réduction de la paramétrisation complète  $(\Phi, X)$  qui définit la structure différentiable de  $X$ .

**Définition 6.16** Deux structures géométriques d'ordre  $k$

$$(P_i, p, X, G) \subset (\mathcal{R}^k(X), p, X, GL_k(\mathbb{R}^n))$$

$i = 1, 2$  sont dites localement équivalentes si tout point  $x \in X$  possède un voisinage  $U$  domaine d'un difféomorphisme local  $\phi : U \rightarrow \phi(U)$  tel que

$$d_y(\phi)(P_1)_y = (P_2)_{\phi(y)}$$

quel que soit  $y \in U$ .

**Définition 6.17** Deux structures géométriques d'ordre  $k$

$$(P_i, p, X, G) \subset (\mathcal{R}^k(X), p, X, GL_k \mathbb{R}^n)$$

$i = 1, 2$  sont dites formellement équivalentes au point  $x \in X$  s'il existe un difféomorphisme formel  $F$  défini au point  $x$  tel que

$$F_{*x}(P_1^\infty)_x = (P_2^\infty)_{F(x)}.$$

### Sémantique

Soit  $(X, \mathcal{F})$  la structure fonctionnelle (complète) qui détermine la structure différentiable de  $X$ , on sait qu'il y a une correspondance bijective entre les difféomorphismes de  $X$  et les automorphismes de l'anneau structural  $\mathcal{F}(X)$ . Il sera question de la notion d'automorphisme formel de l'anneau  $\mathcal{F}(X)$  dans seconde partie (Le lecteur peut garder en mémoire des variantes du formalisme de Kontsevich) [12], [23].

Un des problèmes au centre de l'analyse globale dans une variété  $X$  est le passage de l'équivalence formelle à l'équivalence analytique. Voici un exemple historique. [28]

Considérons  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  muni des coordonnées  $(z, t)$ . Soit  $t \rightarrow f(t)$  une fonction différentiable.

Considérons le système suivant

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial t} = f(t).$$

**Théorème 6.6** [28] *Quelle que soit  $f$  ce système est formellement intégrable mais elle est intégrable si et seulement si  $f$  est analytique.*

Pendant plus de trois siècles la question de passer de formel à l'analytique est restée obscure. C'est le formalisme de Spencer qui a conduit y voir clair. Le complexe de Spencer linéaire sera défini dans la partie consacrée aux éléments d'algèbre homologique.

## 6.1 NOTIONS SUPPLEMENTAIRES.

Le théorème de Frobenius dit qu'un système différentiel en involution  $\mathcal{D}$  dans une variété  $X$  y est complètement intégrable. Lorsqu'il en est ainsi l'ensemble  $\mathcal{F}$  des sous-variétés intégrales maximales de  $\mathcal{D}$  constitue une partition de  $X$  appelé **feuilletage**. Le couple  $(X, \mathcal{F})$  est appelé variété feuilletée. Chaque sous-variété intégrale maximale de  $\mathcal{D}$  est appelée **feuille** de  $\mathcal{F}$

La relation d'appartenance à la même feuille est une relation d'équivalence dans  $X$  dont le quotient est noté  $\mathcal{F} \backslash X$  et appelé l'espace des feuilles de  $\mathcal{F}$ . En général on munit l'espace des feuilles de la topologie (dite topologie quotient) qui fait de projection canonique

$$X \rightarrow \frac{X}{\mathcal{F}}$$

une fibration topologique. En général la topologie quotient n'est pas séparé Hausdorff. Ainsi la pratique topologique y prend le pas sur la géométrie différentielle et sur l'analyse classique.

Faute de pouvoir pratiquer la géométrie différentielle dans  $\frac{X}{\mathcal{F}}$  on s'abstient d'y descendre, on reste dans  $X$  pour s'adonner à **deux types de pratiques** dont l'un porte le label **topologie différentiel** et l'autre le label **géométrie différentielle transverse du feuilletage  $\mathcal{F}$** .

Lorsque muni de la topologie quotient l'espace des feuilles  $\frac{X}{\mathcal{F}}$  est une variété on dit que le feuilletage  $\mathcal{F}$  est simple. C'est à l'avis de l'auteur de ces notes le cadre adapté à la géométrie de l'information.

Je vais fixer le vocabulaire qui sera utilisé dans la sous-section consacrée à la notion de **sémi-modèle statistique**

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage simple dans une variété  $X$  et  $p$  la fibration canonique de  $X$  sur l'espace des feuilles.

**Définition 6.18** *Un vecteur tangent  $v_y \in T_y X$  est **vertical** de  $d_y(v_y) = 0$ . une  $k$ -forme différentielle  $\omega \in \Omega^k(X)$  est **horizontale** si  $\iota_v \omega = 0$  quel que soit le vecteur vertical  $v$ .*

- Définition 6.19** (1). Deux champs des vecteurs tangents  $v, v'$  sont **transversalement équivalents** si  $d_y p(v_y - v'_y) = 0 \forall y \in X$ .
- (2). Un **champ des vecteurs transverse** (à  $\mathcal{F}$ ) est une classe d'équivalence des champs des vecteurs transversalement équivalents.
- (3). Un champ des vecteurs  $\zeta$  est dit **projetable** si  $\forall y \in X d_y p([v, \zeta]) = 0$  quel que soit le champ des vecteurs tangents verticaux  $v$ .
- (4). Une forme bilinéaire  $g$  est **transverse à  $\mathcal{F}$**  si  $g(\zeta, v) = g(v, \zeta) = 0$  pour tout champ des vecteurs verticaux  $v$ .
- (5). Une forme bilinéaire  $g$  **projetable** si elle horizontalement et si pour champ des vecteurs verticaux  $v$  on a l'identité

$$v(g(\zeta, \zeta')) = g([v, \zeta], \zeta') + g(\zeta, [v, \zeta']).$$

### Commentaire.

Grosso modo, une forme différentielle ou une multi-linéaire est transverse lorsqu'elle ne dépend que des champs des vecteurs transverses. Un objet est projetable lorsqu'il est constant lelong des feuilles. Ces remarques permettent de parler des objets transverses ou projetables même quand les feuilles n'ont pas des bonnes structures de variétés ou lorsque le feuilletage est **trop singulier**.

**Définition 6.20** Un feuilletage  $\mathcal{F}$  est dit **mésuré** si  $\forall y \in X$  la feuille  $\mathcal{F}_y$  porte une mesure de Radon  $d_{v_y}$  et si la variation de cette mesure est transversalement différentiable.

### Commentaire bis.

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage mesuré dans  $\mathcal{X}$ . A partir des objets transverses dans  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  on construit des objets projetables au moyen de l'intégration lelong des feuilles. Si les objets sont lourds on peut procéder préalablement par écrasement à l'aide de partition de l'unité.

## 7 HOMOTOPIE DES CHEMINS.

La notion d'homotopie ne requière pas la différentiabilité. Nous gardons la perspective de paramétrisation.

Soit  $X$  une variété dont la structure est définie par une paramétrisation complète.

Je survole (sans démonstration) les notions utilisées plus loin.

**Définition 7.1** Une sous-variété pointée  $(x, Y)$  de  $X$  dont la structure de variété est définie par une paramétrisation de dimension 1 et de classe  $C^0$

$$(0, \mathbb{R}) \xrightarrow{\phi} (x, Y)$$

est appelée courbe continue paramétrée passant par  $x$  à l'instant zéro.

**Définition 7.2** Soit  $c(t)$  une courbe paramétrée par l'intervalle d'extrémités  $-1$  et  $+1$  avec  $c(0) = x \in X$ . La restriction

$$(0, [0, 1]) \xrightarrow{c} (x, Y) \subset (x, X)$$

est appelée chemin d'origine  $x$ .

Cette section est consacrée pour l'essentiel aux chemins dans des variétés. Soit  $X$  une variété différentiable on note  $C^0([0, 1], X)$  l'ensemble des chemins dans  $X$ .

**Définition 7.3** Deux chemins  $c_1, c_2 \in C^0([0, 1], X)$  sont dits homotopes s'il existe une application continue

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

telle que

$$H(0, t) = c_1(t)$$

et

$$H(1, t) = c_2(t)$$

pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Soit  $c$  un chemin dans  $X$ .

Les points  $c(0)$  et  $c$  et  $c(1)$  sont appelés respectivement origine et extrémité du chemin  $c$  cependant l'expression extrémités (au pluriel) du chemin  $c$  désigne la paire  $(c(0), c(1))$ .

Ces considérations conduisent à la nécessité de précision sur l'attitude des extrémités lors de l'homotopie des chemins. On va retenir les distinctions suivantes

**Homotopie à extrémités libres.**

Deux chemins  $c_1, c_2 \in C^0([0, 1], X)$  sont dits homotopes à extrémités libres s'il existe une application continue

$$[0, 1] \times [0, 1] \xrightarrow{H} X$$

telle que  $H(0, t) = c_1(t)$  et  $H(1, t) = c_2(t) \quad \forall t \in [0, 1]$ .

### Homotopie à extrémités fixes.

Deux chemins  $c_1, c_2 \in C^0([0, 1], X)$  sont dits homotopes à extrémités fixes s'il existe une application continue

$$[0, 1] \times [0, 1] \xrightarrow{H} X$$

telle que

$$H(0, t) = c_1(t), H(1, t) = c_2(t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$H(s, 0) = c_1(0) = c_2(0), H(s, 1) = c_1(1) = c_2(1) \quad \forall s \in [0, 1].$$

### Homotopie à origine fixe.

Deux chemins  $c_1, c_2 \in C^0([0, 1], X)$  sont dits homotopes à origine fixe s'il existe une application continue

$$[0, 1] \times [0, 1] \xrightarrow{H} X$$

telle que

$$H(0, t) = c_1(t) \text{ et } H(1, t) = c_2(t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$H(s, 0) = c_1(0) = c_2(0) \quad \forall s \in [0, 1].$$

**Définition 7.4** *Un lacet dans  $X$  est un chemin  $c \in C^0([0, 1], X)$  tel que  $c(0) = c(1)$ .*

La notion suivante ne souffre pas d'ambiguïté.

### Homotopie des lacets libres.

Deux lacets  $c_1, c_2 \in C^0([0, 1], X)$  sont LIBREMENT homotopes s'il existe une application continue

$$[0, 1] \times [0, 1] \xrightarrow{H} X$$

telle que

$$H(0, t) = c_1(t) \text{ et } H(1, t) = c_2(t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$H(s, 0) = H(s, 1) \quad \forall s \in [0, 1].$$

### HOMOTOPIE DES LACETS D'ORIGINE FIXE.

Deux lacets  $c_1, c_2 \in C^0([0, 1], X)$  de même origine sont dits homotopes à origine fixe s'il existe une application continue

$$[0, 1] \times [0, 1] \xrightarrow{H} X$$

telle que

$$H(0, t) = c_1(t) \text{ et } H(1, t) = c_2(t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$H(s, 0) = H(s, 1) \quad \forall s \in [0, 1].$$

La relation d'être homotope est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont appelées classes d'homotopie.

### Composition des chemins.

**Définition 7.5** *deux chemins  $c_1, c_2 \in C^0([0, 1], X)$  sont composables si  $c_2(0) = c_1(1)$ . Le chemin composé noté  $c_1.c_2$  est défini comme il suit.*

$$c_1.c_2(t) = c_2(2t) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2},$$

$$c_1.c_2(t) = c_2(2t - 1) \quad \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

Cette loi de composition des chemins n'est pas associative. Ainsi  $C^0([0, 1], X)$  est un (pseudo) monoïde.

### L'inverse d'un chemin.

**Définition 7.6** *L'inverse  $c^{-1}$  d'un chemin  $c \in C^0([0, 1], X)$  est le chemin défini par  $c^{-1}(t) = c(1 - t)$ .*

Le chemin constant d'origine  $x \in X$  noté  $e_x$  est l'application constante  $t \rightarrow x$ . Un chemin constant est un lacet.

Il est crucial de garder à l'esprit les assertions de l'énoncé qui suit.

**Théorème 7.1** *Si deux chemins  $c$  et  $c'$  sont composables alors la classe d'homotopie  $[cc']$  du chemin composé  $cc'$  ne dépend que des classes d'homotopie  $[c]$ ,  $[c']$  des facteurs. En outre lorsque  $c$ ,  $c'$  et  $c''$  sont composables les chemins composés  $(cc')c''$  et  $c(c'c'')$  sont homotopes. Pour tout chemin  $c$  les trois chemins  $c$ ,  $c.e_{c(0)}$  et  $e_{c(1)}.c$  sont homotopes (à extrémités fixes). Les chemins  $c.c^{-1}$  et  $e_{c(1)}$  sont homotopes. Les chemins  $c^{-1}.c$  et  $e_{c(0)}$  sont homotopes.*

### Observations.

Lorsque  $c$  et  $c'$  sont composables on définit une loi de composition interne (partielle) dans l'ensemble des classes d'homotopie de chemin en posant

$$[c] \cdot [c'] = [c.c'].$$

Cette loi de composition est associative et possède plusieurs éléments neutres que sont les classes d'homotopie des chemins constants. C'est un groupoïde.

Les propriétés décrites dans le dernier théorème sont invariantes par homéomorphisme. De cette remarque ressort que l'homotopie fournit des invariants topologiques de nature algébrique. Un exemple de ces invariants naît du corollaire suivant.

**Corollaire 7.2** (1). *L'ensemble  $\pi_1(x)$  des classes d'homotopie des lacets d'origine  $x$  est un groupe appelé groupe fondamental de  $X$  au point  $x$ .*  
(2). *Si  $X$  est connexe par arcs alors quels que soient  $x, x' \in X$  les groupes  $\pi_1(x)$  et  $\pi_1(x')$  sont canoniquement isomorphes.*

### Indications

La première affirmation se déduit directement du dernier théorème.

La seconde s'en déduit également via l'existence de chemin  $c$  tel que  $c(0) = x, c(1) = x'$ . Si  $\ell_x$  est un lacet d'origine  $x$  alors  $c.\ell_x.c^{-1}$  est un lacet d'origine  $x'$ . Le passage à la classe d'homotopie conduit au résultat attendu.

Ainsi on associe à tout espace topologique connexe par arcs  $X$  un groupe abstrait noté  $\pi_1(X)$  qui est bien défini à isomorphisme près. Il est appelé groupe fondamental ou premier groupe d'homotopie de  $X$ .

**Définition 7.7** *Un espace topologique connexe est simplement connexe si son groupe fondamental est trivial.*

Groupe trivial veut dire de cardinal 1.

Dans un espace simplement connexe deux chemins de mêmes extrémités sont homotopes.

L'utilité du groupe fondamental en géométrie de l'information me paraît claire. Ce groupe permettra jeter un éclairage nouveau sur la notion de modèle statistique.

## 7.1 NOTION DE REVETEMENT.

Je ne perds pas de vue que ces notes sont destinées en priorité à l'auditoire du GDR Science-Géométrie de l'Information. Les notions de géométrie

différentielle et de topologie sont limitées à ce qui y est nécessaire en particulier pour une lecture feconde de la monographie *Methods of Information Geometry* par S. Amari H. Nagaoka [4], [2], [3], .

Soit  $X$  une variété différentiable.

**Définition 7.8** *Un revêtement de  $X$  est une fibration différentiable  $(\hat{X}, p, X)$  avec la propriété suivante.*

*Tout point  $x \in X$  possède un voisinage  $U$  tel que*

$$p^{-1}(U) = \bigcup_j \hat{U}_j$$

*où les  $\hat{U}_j$  sont des ouverts de  $\hat{X}$  tels que pour chaque  $j$  la restriction de  $p$*

$$\hat{U}_j \xrightarrow{p} U$$

*est un difféomorphisme.*

Nous ne considérons que les revêtements connexes Une conséquence de la définition est que pour tout  $x \in X$   $p^{-1}(x) \subset X$  est une partie fermée discrete de  $\hat{X}$ .

**Définition 7.9** *Soient  $(\hat{X}, p, X)$  et  $(\hat{X}', p', X)$  des revêtements de  $X$ . Un homomorphisme de revêtement est une application différentiable*

$$\hat{X}' \xrightarrow{q} \hat{X}$$

*telle que  $p' = p \circ q$ .*

**Définition 7.10** *Un difféomorphisme de revêtement*

$$\hat{X} \xrightarrow{\varphi} \hat{X}$$

*est appelé transformation de revêtement.*

L'ensemble des transformations de revêtement  $(\hat{X}, p, X)$  est un sous-groupe du groupe des difféomorphismes de  $\hat{X}$ . Il est appelé groupe de revêtement.

## 7.2 RELEVEMENT DES CHEMINS.

Soit  $(\hat{X}, p, X)$  un revêtement de  $X$  et  $c \in C^0([0, 1], X)$  un chemin dans  $X$ .

**Définition 7.11** *Un relèvement de  $c$  dans  $\hat{X}$  est un chemin  $\hat{c} \in C^0([0, 1], \hat{X})$  tel que  $p(\hat{c}(t)) = c(t)$ .*

**Proposition 7.3** *Soit  $(\hat{X}, p, X)$  un revêtement de  $X$  et soit  $c \in C^0([0, 1], X)$ . Par tout  $\hat{x} \in p^{-1}(c(0))$  passe un unique relèvement  $\hat{c}$  de  $c$ .*

## Indications

On choisit une suite finie  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = 1$  et une suite d'ouverts  $U_j$ ,  $0 \leq j \leq m - 1$  jouissant des propriétés suivantes

1.  $c([t_j, t_{j+1}]) \subset U_j$
2.  $p^{-1}(U_j)$  est une réunion disjointe des ouverts  $\hat{U}_{\alpha_j}$  dont chacun est  $p$ -difféomorphe à  $U_j$ .

Soit  $y \in p^{-1}(c(0))$  on choisit une suite d'ouverts

$$\hat{U}_j \subset \hat{X}, \quad 0 \leq j \leq m - 1$$

tels que

$$y \in \hat{U}_{\alpha_0}, \quad \hat{U}_{\alpha_j} \cap \hat{U}_{\alpha_{j+1}} \neq \emptyset$$

pour  $0 \leq j \leq m - 1$ . Il est clair qu'il existe un unique relèvement de  $c$  d'origine  $y$ .

## REMARQUES

(1). Le relèvement de chemins dans  $\hat{X}$  préserve l'homotopie à extrémités fixes. Autrement dit si deux chemins de même extrémités sont homotopes, alors leur relevé de même origine sont dans la même classe d'homotopie à extrémités fixes.

(2). Il faut garder en mémoire le point (1) pour comprendre la notion de déroulement des connexions plates. (Voir plus loin).

## 7.3 ACTION DU GROUPE FONDAMENTAL.

Il s'agit d'un homomorphisme naturel de  $\pi_1(X)$  dans le groupe de transformations d'un revêtement  $(\hat{X}, p, X)$ . Soit  $x \in X$ , et  $\gamma \in [\gamma] \in \pi_x(X)$ .

Par tout  $\hat{x} \in p^{-1}(x)$  passe un unique relèvement  $\hat{\gamma}$  avec  $\hat{\gamma}(0) = \hat{x}$ .

Puisque

$$p(\hat{\gamma}(t)) = \gamma(t)$$

on a

$$p(\hat{\gamma}(1)) = \gamma(1),$$

$$\hat{\gamma}(1) \in p^{-1}(x).$$

Si  $\gamma$  est homotope à  $\gamma'$  alors  $\hat{\gamma}'(0) = \hat{\gamma}(0)$  entraîne  $\hat{\gamma}'(1) = \hat{\gamma}(1)$ .

L'application

$$\hat{x} \xrightarrow{\gamma} \hat{\gamma}(1)$$

ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\gamma$ . Puisque les revêtements sont connexes par arcs cette action de  $\pi_1(X)$  dans  $\hat{X}$  est une action transitive dans chaque fibre  $p^{-1}(x)$ .

**Définition 7.12** *Un revêtement  $(\tilde{X}, p, X)$  est appelé revêtement universel si  $\tilde{X}$  est simplement connexe et si étant donné tout autre revêtement  $(\hat{X}, p, X)$  il existe un homomorphisme de revêtement surjectif  $\tilde{X} \rightarrow^q \hat{X}$ .*

**Observation.**

Le triplet  $(\tilde{X}, q, \hat{X})$  est un revêtement.

**Proposition 7.4** *Le revêtement universel  $(\tilde{X}, \tilde{p}, X)$  est unique à isomorphisme de revêtements près.*

**Indication.**

C'est une conséquence directe de la simple connexité des revêtements et de l'action des groupes fondamentaux dans le revêtement.

## 7.4 REVETEMENT UNIVERSEL ET GROUPE FONDAMENTAL.

Soit  $(\hat{X}, \hat{p}, X)$  un revêtement de  $X$ . On sait que l'action de  $\pi_1(X)$  dans  $\hat{X}$  est transitive dans chaque fibre de  $(\hat{X}, \hat{p}, X)$ . Puisque  $X$  est connexe par arcs les sous groupes d'isotropie sont deux à deux isomorphes. Plus précisément ils sont deux à deux conjugués par les classes d'homotopie des chemins.

Ces remarques montrent que l'action du groupe fondamental de  $X$  dans le revêtement universel est libre.

**Construction d'un revêtement universel.**

Notons  $\mathcal{C}(x_0, X)$  l'ensemble des chemins d'origine  $x_0$  muni de la topologie compact-ouvert. Cet ensemble est stable pour la relation d'homotopie à extrémité fixes. Considérons la fibration topologique

$$\mathcal{C}(x_0, X) \xrightarrow{p} X$$

avec  $p(c) = c(1)$ .

L'image d'un chemin  $c \in \mathcal{C}(x_0, X)$  ne dépend que de sa classe d'homotopie.

La fibration  $p$  se factorise en une fibration

$$\Pi[x_0, X] \xrightarrow{p} X.$$

Le groupe fondamental  $\pi_1(x_0)$  opère à droite dans  $\Pi(x_0, X)$  par la formule

$$[c].[\gamma] = [c.\gamma].$$

Cette action commute avec la fibration en jeu, c'est à dire

$$p([c].[\gamma]) = p([c]).$$

Cette action est libre.

En effet si

$$[c].[\gamma] = [c]$$

alors le lacet  $\gamma$ ,  $c^{-1}.c$  et  $e_{x_0}$  sont homotopes.

La conclusion qui s'impose est que  $\Pi[x_0, X]$  est un revêtement universel de  $X$ .

## 8 CONNEXIONS BIS. APPLICATIONS EXPONENTIELLE.

Dans toute cette section toute variété différentiable  $X$  est identifiée avec la section nulle de son fibré tangent  $TX$ .

L'application exponentielle ouvre certainement une des perspectives qui éclaire le mieux pourquoi dans la théorie des groupes de Lie le passage de la dimension finie à la dimension infinie requière un changement de la nature de l'intuition.

Il s'agit d'une application notée  $Exp_{\nabla}$  associée à toute connexion de Koszul  $\nabla$ . C'est une application différentiable partielle de la variété  $TX$  dans la variété  $X$  qui prolonge l'application identité de la section nulle.

### 8.1 GEODESIQUES DES CONNEXIONS DE KOSZUL.

Soit  $(X, \nabla)$  un couple formé d'une variété  $X$  équipée d'une connexion de Koszul  $\nabla$ .

Soit

$$[0, 1] \xrightarrow{c} X$$

un chemin différentiable par morceaux. Posons

$$\dot{c}(t) = \frac{c(t)}{dt}.$$

Pour chaque  $t \in [0, 1]$   $\dot{c}(t)$  est un vecteur tangent à  $X$  au point  $c(t)$ . Il est défini par

$$\dot{c}(t)(f) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(c(t+s)) - f(c(t))}{s}.$$

On note  $\nabla \dot{c}(t)$  l'endomorphisme linéaire de l'espace vectoriel  $T_{c(t)}X$  défini par

$$v \rightarrow \nabla_v \dot{c}(t).$$

**Définition 8.1** *Un chemin  $c(t)$  est une géodésique de la connexion  $\nabla$  lorsque  $\dot{c}(t) \in \ker(\nabla \dot{c}(t)) \forall t \in [0, 1]$ .*

Les chemins géodésiques de la connexion de Koszul  $\nabla$  sont donc des solutions de l'équation différentielle

$$\nabla_{\dot{c}(t)} \dot{c}(t) = 0.$$

#### PROBLEME DE CAUCHY.

Il s'agit de la résolution de l'équation des géodésiques avec la condition

initiale fixée.

Fixons un voisinage  $U$  de  $c(0) \in TX$  qui est domaine des coordonnées locales.

$$(x_1, \dots, x_m, dx_1, \dots, dx_m).$$

On a

$$(c(t), \dot{c}(t)) = (x_1(t), \dots, x_m(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_m(t)}{dt}).$$

Les fonctions de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$  sont définies par les formules suivantes

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \sum_i \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

L'équation des géodésiques devient le système d'équations numériques ( $E^i$ ) suivant

$$\frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i(c(t)) \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{dx_k(t)}{dt} = 0.$$

Nous considérons ce système de premier ordre dans le voisinage  $U$  regardé une fois pour toutes comme ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Les fonctions coordonnées inconnues sont

$$(x_i(t), \frac{dx_i(t)}{dt}).$$

Sous cette perspective une condition initiale est un point  $(x_0, v) \in TX$ .

Le problème de Cauchy des géodésiques de  $(X, \nabla)$  consiste en l'intégration le système ci-dessous avec condition initiale

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{c}(t)}(\dot{c}(t)) &= 0, \\ ((c(0), \dot{c}(0)) &= (x_0, v)). \end{aligned}$$

C'est un système dit équation ordinaire. L'existence et l'unicité de solution maximale est assurée par un théorème classique.

Pour mémoire, je vais rappeler sans entrer dans des détails techniques deux approches qui conduisent chacune au théorème d'existence et d'unicité.

Le point commun aux deux approches que je vais décrire est que la variété ambiante est  $TX$  où on pose

$$\zeta(t) = (\zeta_1(t), \zeta_2(t)) = (c(t), \dot{c}(t)).$$

Le système de départ devient

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_1^i}{dt} &= \zeta_2^i, \\ \frac{d\zeta_2^i}{dt} &= \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \zeta_2^j \zeta_2^k. \end{aligned}$$

L'équation des géodésiques devient une équation de premier ordre

$$\frac{d\zeta(t)}{dt} = f(\zeta(t)).$$

On transforme le problème de Cauchy en l'équation integrale

$$\zeta(t) = \zeta(0) + \int_0^t f(\zeta(\tau))d\tau.$$

**Pour mémoire.**

On cherche des applications  $t \rightarrow \zeta(t)$  qui habitent l'ensemble

$$\mathcal{B} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n}).$$

**Un exercice fecond**

les ensembles  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^n$  sont des espaces métriques complets ( ce sont de surcroît des espaces de Banach de dimension finie).

Does  $\mathcal{B}$  admitt a complete metric space structure ?

**Prendre des risques !**

Répondons YES et continuons.

On construit dans  $\mathcal{B}$  la suite  $\zeta_m$  en posant

$$\begin{aligned}\zeta_0(t) &= \zeta(0), \\ \zeta_{m+1}(t) &= \zeta_0 + \int_0^t f(\zeta_m(\tau))d\tau.\end{aligned}$$

Voici ce qu'on fait de cette dernière suite.

**Première approche.**

On montre que la suite  $\zeta_m$  est une suite de Cauchy. C'est l'idée qui est belle, il faut seulement quelque habilité en analyse, c'est à dire savoir estimer.

Dans  $\mathcal{B}$  la suite  $\zeta_m$  converge vers une limite  $\zeta$ .

Les circonstances sont favorables à la commutation

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^t f(\zeta_m(\tau))d\tau = \int_0^t \lim_{m \rightarrow \infty} f(\zeta_m(\tau))d\tau.$$

Pour terminer il suffit de tirer la conséquence du fait que  $\zeta_m$  et  $\zeta_{m+1}$  convergent vers  $\zeta$  pour obtenir

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \int_0^t f(\zeta(\tau))d\tau.$$

## Seconde approche.

On considère l'application  $T$  du Banach  $\mathcal{B}$  dans lui même définie par

$$T(\zeta)(t) = \zeta(0) + \int_0^t f(\zeta(\tau))d\tau.$$

On montre que  $T$  est une contraction.

Un classique théorème du calcul différentiel (L3) assure que toute contraction dans un espace métrique complet possède un unique point fixe. Il existe donc  $\zeta \in \mathcal{B}$  tel que

$$T(\zeta) = \zeta.$$

## Conclusion

Tout problème de Cauchy pour l'équation des géodésiques

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= f(\zeta(t)), \\ \zeta(0) &= \zeta_0 \end{aligned}$$

possède une unique solution maximale définie dans un intervalle  $[\tau_1, \tau_2] \subset \mathbb{R}$ .

## Une précaution

Soit  $\mathcal{C} \subset X$  une courbe tracée dans  $X$ . Tout paramétrage

$$t \rightarrow c(t) \in \mathcal{C}$$

définit une orientation de  $\mathcal{C}$  dans le sens de variation du paramètre  $t$ .

Nous employons le mot CHEMIN uniquement pour les courbes paramétrées par l'intervalle  $[0, 1]$ .

Naturellement chaque problème de Cauchy pour l'équation des géodésiques possède une solutions maximale  $\zeta(t)$  définie dans un intervalle symétrique  $[-\epsilon, \epsilon]$ .

Pour définir l'application exponentielle on s'intéresse uniquement au morceau de la solution maximale qui est paramétré par le sous-intervalle positif  $[0, \epsilon]$ .

### Définition 8.2 *L'application*

$$T_x X \xrightarrow{\text{Exp}_x} X$$

*fait correspondre à tout  $v \in T_x X$  l'extrémité  $\zeta_1(\epsilon) = p_1(\zeta(\epsilon))$  de la courbe géodésique maximale*

$$[-\epsilon, \epsilon] \xrightarrow{\zeta} TX$$

*qui satisfait la condition*

$$\zeta(0) = (x, v).$$

Maintenant fixons  $v \in T_x X$  et considérons l'application

$$\epsilon \rightarrow \epsilon v.$$

C'est une courbe dans  $T_x X$ . Le point  $\epsilon v$  est l'extrémité du chemin

$$t \rightarrow t\epsilon v.$$

Maintenant on a le chemin

$$t \rightarrow \zeta(t\epsilon)$$

Ce chemin est la partie positive (viz partie paramétrée par l'intervalle  $[0, 1]$ ) de la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= f(\zeta(t)), \\ \zeta(0) &= (x, \epsilon v). \end{aligned}$$

On a donc par définition

$$\text{Exp}_{\nabla}(\epsilon v) = \zeta(\epsilon).$$

De ces considérations on déduit l'application différentiable (de paires)

$$(0, T_x X) \xrightarrow{\text{Exp}_{\nabla}} (x, X)$$

Puisque

$$T_0 T_x X = T_x X$$

la dérivée  $d_0 \text{Exp}_{\nabla}$  est une application linéaire de  $T_x X$  dans lui même. la formule

$$\text{Exp}_{\nabla}(\epsilon v) = \zeta(\epsilon v)$$

montre que

$$d_0(\text{Exp}_{\nabla}) = 1.$$

Le classique théorème d'inversion locale assure que  $\text{Exp}_{\nabla}$  est difféomorphisme local d'un voisinage de 0 dans  $T_x X$  sur un voisinage de  $x$  dans  $X$ .

Le lecteur aura remarqué que le domaine (dans  $\mathbb{R}$ ) de définition des solutions maximales des problème de Cauchy dépendent des conditions initiales, c'est à dire du choix des points du fibré tangent  $TX$ . Cependant sur une demie droite donnée  $\mathbb{R}^+ v_x \subset T_x X$  il existe un unique vecteur  $w = \tau v_x$  jouissant de la propriété suivante :

**la solution maximale du problème de Cauchy avec conditions initiales  $(x, \tau v_x)$  est définie dans l'intervalle  $[0, 1]$ .** La réunion  $\tilde{\Omega}_x$  des tels  $w \in T_x X$  pris sur les demie droites tangentes orientées issues d'un point  $x$  est un convexe dans l'espace vectoriel  $T_x X$ . En restriction  $\text{Exp}_{\nabla}$  y définit un difféomorphisme.

**Définition 8.3** *Le domaine de définition de l'application exponentielle de  $Tx$  dans  $X$  est la réunion*

$$\tilde{\Omega} = \bigcap_x \tilde{\Omega}_x$$

**Exercice**

$$\tilde{\Omega} \xrightarrow{\text{Exp}_{\nabla}} X$$

est un revêtement de  $X$ .

Je rappelle la définition classique suivante.

**Définition 8.4** *Une connexion de Koszul  $\nabla$  est dite complète si la solution maximale de chaque problème de Cauchy de l'équation des géosiques est définie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .*

# 9 QUELQUES OUTILS D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE.

## PROLOGUE

J'informe le lecteur spécialiste de l'algèbre homologique que ces notes sont destinées à des noms spécialistes. Il s'agit pour ainsi dire d'algèbre homologique effective. Le but de l'approche adoptée ici est la compréhension par un étudiant de L2 de ce qu'est un complexe d'homologie. Les seules notions utiles sont ceux d'espace vectoriel, d'application linéaire et d'espace vectoriel quotient. Si on omet des mots savants et se contente de la règle et du compas ces notions sont déjà accessibles en troisième année du collège. Sont donc déclarés hors la loi des expressions savantes de genre **catégorie, foncteur, catégorie dérivée**.

La seule exigence est la signification de **comprendre**.

Pour y inciter je recommande d'hierarchiser trois niveaux de lecture de ces notes qui sont écrites pour répondre aux trois questions de l'âge de raison, mais encore d'innocence. **Quoi ? Pour Quoi Faire ? Comment ?**

Ce schéma d'apprentissage guide l'esprit de ces notes.

## PARTIE A : LE DEBUT.

Le but de cette partie est de répondre à la première question. **QUOI ?**

### 9.1 HOMOLOGIE.

Le titre ci-dessus est la réponse à la question QUOI ? Il reste à y mettre un contenu.

La notion de (co)homologie est en réalité du niveau de  $L_1 - L_2$  où sont repris les objets étudiés en troisième année du collège mais sans utilisation des deux expressions qui suivent.

1. Espace vectoriel,
2. Quotient d'un espace vectoriel par un sous-espace vectoriel.

#### 9.1.1 ESPACE VECTORIEL DIFFERENTIEL.

En fait il n'y a rien qui n'ait été enseigné en L1. On y compose des applications linéaires. Comme souvent des codes vont servir à raccourcir des longues phrases. En voici un exemple.

**Définition 9.1** *Un espace vectoriel différentiel est un couple  $(V, d)$  formé d'un espace vectoriel  $V$  et d'une application linéaire de  $V$  dans  $V$  vérifiant*

$$d \circ d = 0.$$

Ainsi comprendre ce que signifient **espace vectoriel, application linéaire, application composée** est l'unique outil pour comprendre ce que signifie

**espace vectoriel différentiel.** Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion on dira pour faire court **espace différentiel**.

**Définition 9.2** *Un homomorphisme d'espace vectoriel différentiel de  $(V, d)$  dans  $(W, d)$  est une application linéaire*

$$V \xrightarrow{f} W$$

qui satisfait l'identité

$$f((dv)) = d(f(v))$$

quel que soit  $v \in V$ .

**Définition 9.3** *Un sous-espace différentiel d'un espace différentiel  $(V, d)$  est un espace différentiel  $(T, d)$  tel que  $T \subset V$  et l'application inclusion est un homomorphisme d'espace différentiel.*

**Une inclusion richissime !**

Juste pour s'émerveiller de la richesse d'une évidence enfant de

$$d \circ d = 0.$$

Posons

$$Z(d) = \text{Ker}(d) \quad \text{et} \quad B(d) = d(V).$$

Il s'agit de l'inclusion

$$B(d) \subset Z(d).$$

Cette inclusion est une caverne dont je vais entrebâiller l'entrée. La caisse à outils est la notion d'**espace vectoriel quotient**

$$\frac{V}{T}$$

d'un espace vectoriel  $V$  par un sous-espace vectoriel  $T$ .

Soit  $T$  un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel  $V$ . La relation d'équivalence canonique définie par  $T$  est celle qui identifie deux éléments  $v$  et  $v'$  dès que leur différence  $v - v'$  habite le sous-espace  $T$ .

Reprenons ce procédé d'identification. L'unique adresse nécessaire est l'utilisation de la règle et du crayon pour tracer des triangles sur une feuille de papier. Dans ce contexte tout ce qui se trouve hors de la feuille de papier est **inaccessible**. En vocabulaire savant l'inaccessible est à l'infini. Un auditoire à l'âge des premières lectures des bandes dessinées comprend la notion de parallélisme ainsi formulée : deux droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  (tracées sur la feuille de papier) sont **parallèles** si elles ne se rencontrent.

On va penser au quotient

$$\frac{V}{\vec{T}}$$

Sur la feuille de papier  $V$  une origine  $O \in V$  et une droite  $T$  passant par  $O$  sont fixées une fois pour toutes. On joue avec les triangles  $0\vec{v}w$ .

Voici la règle du jeu. C'est la **règle de toboggan**. Chaque fois que le côté  $v\vec{w}$  est parallèle à la droite  $T$  on identifie droites  $\vec{Ov}$  et  $\vec{Ov'}$  par glissement sur  $v\vec{w}$ . On obtient ainsi une nouvelle droite qui passe par  $O$ . Ceci est clair en troisième année de collège. Tous les triangles  $O\vec{v'w'}$  qui sont semblables à  $O\vec{vw}$  donneront naissance à la même nouvelle droite. Cette nouvelle famille de droites est le quotient

$$\frac{V}{\vec{T}}$$

### 9.1.2 HOMOLOGIE D'UN ESPACE DIFFÉRENTIEL.

**Définition 9.4** *Le sous-espace vectoriel*

$$Z(V) = \ker(d) \subset V$$

*d'un espace vectoriel différentiel  $(V, d)$  est appelé sous-espace des cycles de  $(V, d)$ .*

*Le sous-espace vectoriel*

$$B(V) = d(V) \subset V$$

*est appelé sous-espace des bords de  $(V, d)$ . Deux cycles qui diffèrent par un bord sont dits homologues.*

*L'espace vectoriel quotient*

$$H(V) = \frac{Z(d)}{B(d)}$$

*est appelé espace d'homologie de  $(V, d)$ .*

Maintenant un étudiant de L1 sait ce qu'est un espace différentiel  $(V, d)$  et son espace d'homologie  $H(V, d)$ . Je vais donner des exemples.

### EXEMPLES d'espaces vectoriels différentiels et d'homologie.

Je vais en décrire deux dont le premier est l'espace vectoriel

$$\mathbb{R}^m = \{x_1, \dots, x_m\}.$$

L'endomorphisme linéaire  $d$  est défini comme il suit

$$d(x_1, \dots, x_m) = (0, \dots, 0, x_1 + \dots + x_{m-1}).$$

Le sous-espace  $Z(V, d)$  des cycles est le sous-espace vectoriel de dimension  $m - 1$  défini par

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 0.$$

Le sous-espace vectoriel  $B(V, d)$  des bords est la droite engendrée par le vecteur

$$x = (0, \dots, 0, 1).$$

L'espace d'homologie  $H(V, d)$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^{m-2}$ .

Géométriquement  $H(V)$  peut être identifié au sous-espace euclidien orthogonal au plan  $\text{Vect}((1, \dots, 1, 0), (0, 0, \dots, 0, 1))$ .

Pour construire le second exemple je considère l'ensemble strictement croissant

$$\mathcal{S} = \{1 < 2 < \dots < m\}.$$

Pour chaque nombre entier positif  $1 \leq j \leq m$  je note  $\mathcal{S}_j$  l'ensemble des sous-suites strictement croissantes de longueur  $j$  de  $\mathcal{S}$ . On note  $V_j$  l'espace vectoriel engendré par les suites constituant  $\mathcal{S}_j$  et  $V$  la somme directe des  $V_j$ . On définit l'application linéaire

$$V \xrightarrow{d} V$$

comme il suit

$$d\mathcal{S}_1 = 0.$$

$$d(t_1 < t_2 \dots < t_j) = \sum_{1 \leq i \leq j} (-1)^i (t_1 < \dots < \hat{t}_i < \dots < t_j).$$

### Exercice 1.

Calculer l'homologie du second exemple ci-dessus.

### Exercice 2.

Soit  $(T, d)$  un sous-espace différentiel d'un espace différentiel  $(V, d)$ . Montrer que l'espace vectoriel quotient de  $V$  par  $T$  possède une structure d'espace différentiel.

### Exercice 3.

Montrer que la somme directe des espaces vectoriels différentiels  $(V_j, d)$  possède une structure d'espace vectoriel différentiel.

#### 9.1.3 Héritage.

Je pars d'un homomorphisme d'espace différentiel

$$(V, d) \xrightarrow{f} (W, d).$$

Les inclusions qui suivent sont évidentes

$$f(Z(V, d)) \subset Z(W, d).$$

$$f(B(V, d)) \subset B(W, d).$$

**Définition 9.5** *Des inclusions*

$$f(Z(V, d)) \subset Z(W, D),$$

$$f(B(V, d)) \subset B(W, d)$$

les espaces d'homologie héritent de l'application linéaire

$$H(V, d) \xrightarrow{\tilde{f}} H(W, d)$$

définie par

$$\tilde{f}([v]) = [f(v)]$$

quel que soit  $v \in Z(V, d)$ .

### 9.1.4 SUITE COURTE D'ESPACES DIFFÉRENTIELS.

**Définition 9.6** *Une suite exacte courte d'espaces différentiels est une suite d'homomorphismes d'espace différentiel*

$$0 \longrightarrow (T, d) \xrightarrow{\iota} (V, d) \xrightarrow{\pi} (W, d) \longrightarrow 0$$

dans laquelle les homomorphismes  $\iota$  et  $\pi$  sont respectivement injectif et surjectif.

L'exactitude de la suite courte signifie que l'on a

$$\pi(\iota(t)) = 0$$

quel que soit  $t \in T$ .

**Suite héritage.**

De la suite exacte ci-dessus les espaces d'homologie héritent de la suivante

$$H(T) \xrightarrow{\tilde{\iota}} H(V) \xrightarrow{\tilde{\pi}} H(W).$$

**Lemme 9.1** *La suite d'homologie ci-dessus est exacte au niveau  $H(V)$ .*

**Preuve**

L'exactitude au niveau  $H(V)$  signifie l'égalité

$$\tilde{\iota}(H(T)) = \ker(\tilde{\pi}).$$

Soit  $[v] \in \ker(\tilde{\pi})$  et soit  $v \in [v]$ .

Puisque

$$\tilde{\pi}([v]) = 0$$

le cycle  $\pi(v)$  est dans le sous-espace  $B(W, d)$ . Il existe  $w \in W$  tel que

$$\pi(v) = d(w).$$

Puisque  $\pi$  est surjective il existe  $v' \in V$  tel que

$$w = \pi(v').$$

On a donc

$$\pi(v) = d(\pi(v')) = \pi(d(v')).$$

Par conséquent

$$v - d(v') = \iota(t) \in \iota(T).$$

Puisque l'homomorphisme  $\iota$  est injectif  $t \in Z(T, d)$ .

On a donc

$$v = \iota(t) + d(v'),$$

Ce qui signifie que  $[v] \in \tilde{\iota}(H(T))$ .

Le lemme est démontré.

### 9.1.5 TRIANGLE EXACT D'UNE SUITE EXACTE COURTE.

Je souhaite que le lecteur novice éprouve l'envi de franchir l'entrée entrebâillée  $im(d) \subset ker(d)$ .

Le lecteur part d'une suite exacte courte d'espaces différentiels

$$0 \longrightarrow (T, d) \xrightarrow{\iota} (T, d) \xrightarrow{\pi} (W, d) \longrightarrow 0.$$

Il en hérite de la suite d'espaces d'homologie

$$H(T) \xrightarrow{\tilde{\iota}} H(V) \xrightarrow{\tilde{\pi}} H(W)$$

qui est exacte au niveau  $H(V, d)$ .

#### Un triangle

**Lemme 9.2** *Il existe une application linéaire*

$$H(W) \xrightarrow{\delta} H(T)$$

*qui rend exact le triangle suivant*

$$\begin{array}{ccc} & H(V) & \\ \tilde{\pi} \swarrow & & \nwarrow \tilde{\iota} \\ H(W) & \xrightarrow{\delta} & H(T) \end{array}$$

*c'est-à-dire*

$$Ker(\delta) = im(\tilde{\pi}),$$

$$im(\delta) = ker(\tilde{\iota}).$$

**Preuve du lemme.**

**Définition de  $\delta$ .**

Choisissons  $[w] \in H(W)$ ,  $w \in [w]$  et  $v \in V$  tels que

$$w = \pi(v).$$

Parce que  $w \in Z(W)$  on a

$$d(\pi(v)) = \pi(d(v)) = 0.$$

Par conséquent  $d(v) \in \iota(T)$ . Il existe un unique  $t \in T$  tel que

$$d(v) = \iota(t).$$

Parce que  $\iota$  est injectif  $t \in Z(T, d)$ . La classe du cycle  $t \in Z(T, d)$  ne dépend que de la classe  $[w] \in H(W, d)$ . Le lecteur s'en assurera en deux étapes.

(a) si on choisit un autre  $v' \in V$  tel que

$$w = \pi(v')$$

alors  $v - v' \in \iota(T)$ . Puisque  $t, t' \in Z(T, d)$  sont déterminés par

$$\iota(t) = d(v),$$

$$\iota(t') = d(v')$$

les cycles  $t, t' \in Z(T, d)$  sont homologues.

(b) Si on choisit un autre  $w' \in [w]$  alors il existe  $v'' \in V$  tel que

$$w' = w + \pi(d(v'')).$$

En écrivant  $w = \pi(v)$  et  $w' = \pi(v')$  on aura

$$d(v) = d(v')$$

La classe d'homologie  $[t] \in H(T)$  ne dépend que de la classe  $[w] \in H(W)$ .

**Définition 9.7**

$$\delta([w]) = [t].$$

**Preuve de  $\ker(\delta) = \text{im}(\tilde{\pi})$ .**

L'inclusion  $\text{im}(\tilde{\pi}) \subset \ker(\delta)$  est une conséquence directe de la définition de  $\delta$ . En effet si

$$[w] = \tilde{\pi}[v]$$

alors on choisit  $w \in [w]$  et  $v \in Z(V)$  tels que

$$w = \pi(v).$$

On a alors

$$\delta([w]) = 0.$$

Reste à montrer l'inclusion inverse. soit  $[w] \in H(W, d)$  tel que

$$\delta([w]) = 0.$$

On choisit  $w \in [w], v \in V$  tels que

$$w = \pi(v)$$

Que

$$\delta([w]) = 0$$

entraîne qu'il existe  $t \in T$  tel que

$$d(v) = \iota(t).$$

Autrement dit  $v - \iota$  est un élément de  $Z(V, d)$  dont l'image par  $\pi$  est  $w \in Z(W, d)$ . On a donc l'égalité

$$\text{Ker} \delta = \text{im}(\tilde{\pi}).$$

**Preuve de  $\text{ker}(\tilde{\iota}) = \text{im}(\delta)$**

Montrons que  $\text{im}(\delta) \subset \text{ker}(\tilde{\iota})$ .

Partons maintenant de  $[w] \in H(W)$ . On choisit  $w \in [w]$  et  $v \in V$  tels que

$$w = \pi(v),$$

Que  $w \in Z(W, d)$  entraîne que l'existence d'un unique  $t \in Z(T, d)$  tel que  $d(v)\iota(t)$ .

L'inclusion

$$\text{ker}(\tilde{\iota}) \subset \text{im}(\delta)$$

découle aussi de la formule qui définit  $\delta$ . En fait  $\tilde{\iota}([t]) = 0$  veut dire qu'il existe  $v \in V$  tel que

$$\iota(t) = d(v).$$

On a donc visiblement

$$[t] = \delta([\pi(v)]).$$

Le lemme est démontré.

Cette formule montre

$$\tilde{\iota}(\delta([w])) = [\iota(t)] = 0.$$

On a maintenant un triangle **orienté** de sommets  $H(T)$ ,  $H(V)$ ,  $H(W)$  dont le **sens de parcours** est prescrit par la suite (**longue**) d'espaces d'homologie

$$\xrightarrow{\delta} H(T) \xrightarrow{\tilde{\iota}} H(V) \xrightarrow{\tilde{\pi}} H(W) \xrightarrow{\delta} H(T) \xrightarrow{\tilde{\iota}} .$$

La suite longue ci-dessus est exacte au niveau de chaque sommet. Ce qui est traduit triangle exact.

$$\begin{array}{ccc} & H(V) & \\ \tilde{\pi} \swarrow & & \nwarrow \tilde{\iota} \\ H(W) & \xrightarrow{\delta} & H(T) \end{array}$$

### COUPLE EXACT

C'est l'analogie de triangle isocèle si on décide qu'à deux sommets distincts des angles distincts.

Pour construire un triangle isocèle on pose

$$\mathcal{M} = \tilde{\iota}(H(T)) + H(V),$$

$$\mathcal{E} = H(W).$$

On désigne encore par  $\tilde{\iota}$  l'application linéaire

$$\tilde{\iota} \times 1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}.$$

On prolonge  $\tilde{\pi}$  dans  $\mathcal{M}$  par l'application nulle dans  $H(T)$ . Ce prolongement est notée  $j$ .

Enfin on pose  $k = \delta$ .

Le triangle exact précédent devient un triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & \mathcal{M} \\ & \swarrow k & \searrow j \\ & \mathcal{E} & \end{array}$$

dont le parcours est prescrit par la suite exacte

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\tilde{\iota}} \mathcal{M} \xrightarrow{j} \mathcal{E} \xrightarrow{k} \mathcal{M} \xrightarrow{\tilde{\iota}} .$$

Les couples commutatifs appartiennent à l'arsenal de la topologie algébrique (effective) via l'algèbre homologique effective. Ils génèrent des tours de Posnikov dont les niveaux (ou étages) sont les termes des suites spectrales. Grosso modo la pratique de calcul homologique par les suites spectrales font penser aux méthodes numériques (en modélisation et ailleurs!).

## 9.2 ESPACES VECTORIELS GRADUES.

La notion d'espace gradué participe de l'effort de découpe des trop espaces en tranches plus minces et d'étude un peu plus facile.

Soit  $Z$  le groupe des nombres entiers et  $V$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels.

**Définition 9.8** Une  $Z$ -graduation de  $V$  est une décomposition en somme directe des sous-espaces vectoriels

$$V = \bigoplus_{k \in Z} V^k.$$

Les éléments du sous-espace  $V^k$  sont appelés éléments homogènes de degré  $k$ .

**NOTA BENE.**

Sans mention du contraire toutes les graduations considérées sont des  $Z$ -graduations. Un élément  $v \in \bigoplus_k V^k$  sera présenté sous la forme

$$v = \sum v_k.$$

**EXEMPLES d'espaces vectoriels gradués.**

(1). Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie et soit  $f$  une application linéaire diagonalisable de  $V$  dans  $V$ . On range les valeurs propres de  $f$  par ordre croissant  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$ .

L'espace  $V$  est la somme directe des sous-espaces propres  $V^j = V_{\lambda_j}$

On a une  $Z$ -graduation de  $V$  en posant

$$V^j = 0 \quad \text{si } j < 1 \quad \text{ou si } k < j.$$

(2). Soit  $V$  l'espace vectoriel des polynômes de Laurent en l'indéterminée  $z$ . On munit  $V$  de sa  $Z$ -graduation naturelle. Le sous-espace homogène  $V^k$  a pour base le monôme  $z^k$ .

Etant donnés des espaces vectoriels  $Z$ -gradués  $V = \bigoplus_k V^k$  et  $W = \bigoplus_k W^k$ .

**Définition 9.9** Un homomorphisme d'espace vectoriel gradué de  $V$  dans  $W$  est une application linéaire  $f$  de  $V$  dans  $W$  telle que  $f(V^k) \subset W^k$  quel que soit  $k \in Z$ .

**Définition 9.10** Un espace vectoriel gradué  $T = \bigoplus_k T^k$  est un sous-espace gradué d'un espace vectoriel gradué  $V = \bigoplus_k V^k$  si  $T \subset V^k$  et si

$$T^k = T \cap V^k$$

quel que soit  $k \in Z$ .

**Définition 9.11** *Un sous-espace vectoriel  $T \subset V$  d'un espace vectoriel gradué  $V = \bigoplus_k V^k$  est homogène si la relation d'appartenance  $\sum v_k \in T$  entraîne  $v_k \in T$ .*

**Définition 9.12** *Une application linéaire  $f$  d'un espace gradué  $V = \bigoplus_k V^k$  dans un espace gradué  $W = \bigoplus_k W^k$  est dite homogène de degré  $\ell$  si  $f(V^k) \subset W^{k+\ell}$  quel que soit  $k \in Z$ .*

Le degré de  $f$  sera noté  $\text{deg}(f)$ .

### EXEMPLES d'espace gradué.

L'espace  $V = \mathbb{R}[x, y, z]$  des polynômes à trois variables  $x, y, z$  est gradué par le degré total des monômes en  $x, y, z$ .

(1). La multiplication des polynômes par un scalaire est homomorphisme d'espace gradué de  $V$  dans lui même.

(2). La dérivation  $f = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$  est une application linéaire homogène de degré  $-1$ .

(3). La multiplication par le polynôme  $x^2 + y^2 + z^2$  est homogène de degré 2.

### REVEIL

Quitte à se répéter il est opportun de rappeler que la notion d'Homologie telle qu'elle a été introduite dans ces notes n'a eu recours qu'à des notions vraiment élémentaires : espace vectoriel différentiel, quotient par un sous-espace vectoriel.

Comme je l'ai dit de façon évasive la notion d'espace vectoriel gradué répond grosso modo au besoin de découper un gros espace en sous-espace moins gros dans l'espoir de mieux comprendre ou de mieux y voir. Ce besoin est fréquent presque partout où l'on est amené à recourir à l'algèbre homologique.

La section suivante est consacrée à des découpages de certains espaces différentiels en sous-espaces vectoriels plus petits que l'espace ambiant mais sans illusion de décomposition en sous-espaces différentiels.

## 10 Espaces différentiels gradués.

**Définition 10.1** *Un espace vectoriel différentiel gradué est un espace vectoriel Différentiel  $(V, d)$  muni d'une  $Z$ -graduation*

$$V = \bigoplus_k V^k$$

telle que l'endomorphisme linéaire  $d$  est homogène de degré  $\ell \in \mathbb{Z}$ .

## EXEMPLES

(1). On considère des espaces vectoriels  $T$  et  $W$  et l'espace  $V$  engendré par les couples  $v = (t, w) \in T \times W$ .

Soit  $G$  l'espace vectoriel gradué par les sous-espaces homogènes suivants :

$$G^0 = T, \quad G^1 = V, \quad G^2 = W.$$

Les autres sous-espaces homogènes sont nuls.

On définit l'application linéaire  $d$  de degré 1 de  $G$  dans  $G$  de la façon qui suit.

L'application  $T \xrightarrow{d} V$  est l'application linéaire qui prolonge

$$d(t) = (t, 0).$$

L'application  $V \xrightarrow{d} W$  est l'application linéaire qui prolonge

$$d(t, w) = w.$$

On a visiblement  $d^2 = 0$ .

(2). On munit  $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2)\}$  de la graduation par l'indice des composantes. Ceci veut que les éléments  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  ont pour degré respectif 1 et 2.

Soit  $(\mathbb{R}^2, d)$  avec

$$d(x_1, x_2) = (x_2, 0).$$

On a  $\deg(d) = -1$  et  $d^2 = 0$ .

## GENERICITE

Les deux exemples décrits ci-dessus sont génériques dans le sens suivant. Etant un espace différentiel gradué

$$(V = \bigoplus V^k, d)$$

il existe une nouvelle graduation sous laquelle le degré de  $d$  est égal à  $-1$  ou à  $+1$ . En fait le procédé est simple. Posons  $\ell = \deg(d)$  et pour un nombre entier  $k$  posons

$$\tilde{V}^k = \sum_{k\ell}^{(k+1)\ell-1} V^j.$$

Il est évident que l'on a les propriétés suivantes.

$$V = \bigoplus_k \tilde{V}^k.$$

$$d(\tilde{V}^k) \subset \tilde{V}^{k+1}$$

si  $\ell$  est positif.

$$d(\tilde{V}^k) \subset \tilde{V}^{k-1}$$

si  $\ell$  est négatif.

## 10.1 Complexes de chaîne.

**Définition 10.2** *Un complexe de chaîne est un espace différentiel gradué  $(V = \bigoplus_k V^k, d)$  avec  $\deg(d) \in \{-1, +1\}$ .*

### GENERICITE BIS

En fait tout espace différentiel gradué possède une structure de complexes de chaîne.

### DES CONVENTIONS

(1). Lorsque  $\deg(d) = +1$   $(V, d)$  est appelé complexe de cochaîne,  $d$  est appelé opérateur cobord.

(a) Le sous-espace  $Z(V)$  est appelé l'espace des cocycles de  $(V, d)$ .

(b) le sous-espace  $B(V)$  est appelé l'espace des cobords de  $(V, d)$ .

(c) L'espace quotient  $H(V) = \frac{Z(V)}{B(V)}$  est appelé l'espace de cohomologie de  $(V, d)$ .

(2). Les termes bord, cycle, espace d'homologie sont réservés au cas  $\deg(d) = -1$ .

(3). En l'absence précision sur le signe de  $\deg(d)$  nous utilisons l'expression générique complexe de chaîne.

(4). Il existe des espaces différentiels multi-gradués  $(V, d)$ . L'opération différentiel  $d$  a alors une multi-graduation dont le degré total peut être  $-1, +1$  ou  $0$ . Des exemples où le degré total de  $d$  est zéro sont des complexes de Koszul-Spencer dont le rôle est éminent en géométrie différentielle des SEDP. L'utilisation des suites spectrales conduits fréquemment aux espaces différentiels bi-gradués.

### EXEMPLES

(1). Soit  $(S, d)$  l'espace différentiel gradué par les sous-espace homogènes  $S_k$  est engendré par les graphes  $s = (s_1, \dots, s_k)$  des applications de  $(1, \dots, k)$  dans  $\mathbb{R}$ . L'application  $d$  est donnée par

$$d(s) = \sum (-1)^j (s_1, \dots, \hat{s}_j, \dots, s_k).$$

Le couple  $(S, d)$  est un complexe de chaîne.

(2). Soit  $X$  la variété différentiable  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $k$  un nombre entier positif

et  $\Omega^k(X)$  l'espace des formes différentielles de degré  $k$ . On pose

$$\begin{aligned}\Omega^0(X) &= C^\infty(X), \\ \Omega^k(X) &= 0 \quad \text{si } k \text{ est un nombre entier négatif.}\end{aligned}$$

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées euclidiennes de  $X$ . Un monôme différentiel  $\omega \in \Omega^k(X)$  s'écrit

$$\omega = a(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \dots \wedge dx_{i_k}.$$

La différentielle extérieure est

$$d(\omega) = \sum_j \frac{\partial a(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Le couple  $(\Omega(X), d)$  est un complexe de cochaîne.

(3). Considerons un espace vectoriel  $V$  et désignons par  $\wedge^k(V^*)$  la  $k^{\text{ième}}$  puissance extérieure de l'espace vectoriel dual algébrique  $V^*$  de  $V$ . C'est l'espace des applications  $k$ -multi-linéaires alternées de  $V$  dans le corps des bases.

Ce sont des combinaisons linéaires des produits extérieurs des  $k$  formes linéaires, viz

$$\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k.$$

Désignons par  $S^\ell(V^*)$  la  $\ell^{\text{ième}}$  puissance symétrique de  $V^*$ . C'est l'espace des applications  $\ell$ -multi-linéaire symétriques de  $V$  dans le corps des bases. Ce sont des combinaisons linéaires des produits symétriques de  $\ell$  formes linéaires, viz

$$\eta_1 \dots \eta_\ell.$$

Posons

$$\mathcal{C}^{k,\ell} = \wedge^k(V^*) \otimes S^\ell(V^*).$$

C'est l'espace vectoriel des applications  $k + \ell$ -multi-linéaires de  $V$  dans le corps des bases. Ce sont des combinaisons linéaires des applications de la forme

$$\begin{aligned}\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k \otimes \eta_1 \dots \eta_\ell \\ (u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_\ell \rightarrow \beta(u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_\ell)\end{aligned}$$

qui sont alternées par rapport aux  $k$  premiers arguments  $u_1, \dots, u_k$  et symétriques par rapport aux  $\ell$  deniers arguments  $v_1, \dots, v_\ell$ .

Considérons l'espace vectoriel  $\mathcal{C}$  bi-gradué par les sous-espaces homogènes  $\mathcal{C}^{k,\ell}$ . Il possède un structure d'espace différentiel  $(\mathcal{C}, \partial)$  où

$$\mathcal{C}^{k-1,\ell+1} \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}^{k,\ell}$$

est défini par

$$\partial(\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_{k-1} \otimes \eta_1 \dots \eta_{\ell+1}) = \sum_1^{\ell+1} (-1)^j \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_{k-1} \wedge \eta_j \otimes \eta_1 \dots \hat{\eta}_j \dots \eta_{\ell+1}.$$

L'application  $\partial$  est de bidégré  $(+1, -1)$ .

### 10.1.1 Graduation de l'homologie des complexes de chaîne.

Soit  $(V = \sum V_k, d)$  un complexe de chaîne avec  $\deg(d) = \ell \in \{-1, 1\}$ . L'espace d'homologie est un espace vectoriel gradué par les espaces homogènes

$$H_k(V) = \frac{Z^k(V)}{B^k(V)}$$

où

$$\begin{aligned} B^k(V) &= d(V^{k-\ell}), \\ Z^k(V) &= Z(V) \cap V^k. \end{aligned}$$

**Définition 10.3** (1). Les éléments de  $B^k(V)$  sont des (co)bords de degré  $k$  de  $(V, d)$ .

(2). Les éléments de  $Z^k(V)$  sont des (co)cycles de degré  $k$  de  $(V, d)$ .

(3). L'espace vectoriel  $H^k(V)$  est le  $k^{\text{ième}}$  espace de (co)homologie de  $(V, d)$ .

### 10.1.2 Homomorphisme de complexe de chaîne.

Soient  $(V = \oplus_k V^k, d)$  et  $(W = \oplus_k W^k, d)$  des complexes de chaîne.

**Définition 10.4** Un homomorphisme de complexe de chaîne de  $(V, d)$  dans  $(W, d)$  est un homomorphisme d'espace gradué  $f$  tel que

$$f(d(v)) = d(f(v))$$

quelque soit  $v \in V$ .

Il est facile de vérifier que la somme  $f + f'$ , le composé  $f \circ h$  et l'application linéaire inverse  $f^{-1}$  (quand elle existe) des homomorphismes de complexe de chaîne sont des homomorphismes de complexe de chaîne.

Un homomorphisme de complexes de cochaîne  $f$  de  $(V, d)$  dans  $(W, d)$  envoie la paire  $(B^k(V), Z^k(V))$  dans la paire  $(B^k(W), Z^k(W))$ . Il en dérive les applications linéaires

$$H^k(V) \xrightarrow{\tilde{f}^k} H^k(W).$$

**Définition 10.5** Un quasi isomorphisme de complexe de chaîne de  $(V, d)$  dans  $(W, d)$  est un homomorphisme de complexe de chaîne  $f$  dont les applications dérivées  $f^*$  sont des isomorphismes.

### 10.1.3 Suite longue exacte d'une suite courte exacte.

En réalité rien de nouveau. Il s'agit de graduer le triangle exact d'une suite exacte courte des complexes de chaîne.

On part d'une suite exacte des complexes de chaîne

$$0 \longrightarrow (T, d) \xrightarrow{\iota} (V, d) \xrightarrow{\pi} (W, d) \longrightarrow 0.$$

dont le triangle homologique est en fait la suite exacte

$$\xrightarrow{\delta} H(T) \xrightarrow{\tilde{\iota}} H(V) \xrightarrow{\tilde{\pi}} H(W) \xrightarrow{\delta}$$

Puisque  $\iota$  et  $\pi$  sont des homomorphismes de complexe de chaîne, pour tout nombre entier  $k$  on a

$$\xrightarrow{\delta} H^k(T) \xrightarrow{\tilde{\iota}^k} H^k(V) \xrightarrow{\tilde{\pi}^k} H^k(W) \xrightarrow{\delta}$$

L'unique **nouveauté** est que par définition,  $\delta$  envoie  $H^k(W)$  dans  $H^{k+1}(T)$ .

Si nous considérons une suite courte comme une donnée géométrique la notion d'homomorphisme de suite exacte courte est sans ambiguïté. D'un tel homomorphisme les espaces d'homologie héritent d'un homomorphisme de triangle exact.

## 10.2 HOMOTOPIE DE COMPLEXE DE CHAINE.

Tout homomorphisme de complexe de chaîne

$$f : (\oplus_k V^k, d) \rightarrow (\oplus_k W^k, d)$$

induit un homomorphisme d'espace vectoriel gradué

$$\tilde{f} : \oplus_k H^k(V) \rightarrow \oplus_k H^k(W).$$

L'homotopie de complexe de chaîne dit entre autres choses quelle marge on dispose pour choisir des homomorphismes  $f$  qui induisent le même homomorphisme d'espace gradué

$$\oplus_k H^k(V) \rightarrow \oplus_k H^k(W).$$

Dans la définition qui suit  $\ell$  est le degré des opérateurs différentiels  $d$

**Définition 10.6** *Deux homomorphismes de complexe de chaîne  $f, f'$  de  $(V, d)$  dans  $(W, d)$  sont dits homotopes s'il existe une application linéaire  $h$  de  $(V, d)$  dans  $(W, d)$  qui est de degré  $-\ell$  et tel que pour tout  $v \in V^k$  on a*

$$d(h(v)) + h(d(v)) = f(v) - f'(v).$$

Une conséquence directe de cette définition est que si des homomorphismes  $f$ ,  $f'$  sont homotopes alors on a

$$\tilde{f} = \tilde{f}'.$$

### EXEMPLES.

(1). Si le morphisme identité d'un complexe de cochaîne  $(V, d)$  est homotope à l'homomorphisme nul alors presque tous les espaces de cohomologie de  $(V, d)$  sont nuls.

(2). Considérons le complexe de Koszul-Spencer déjà décrit.

$$\mathcal{C} = (\oplus_{k,\ell} \mathcal{C}^{k,\ell}, \partial).$$

Soient  $\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \dots \wedge \theta_k \otimes \eta_1 \dots \eta_\ell \in \mathcal{C}^{k,\ell}$  et  $\eta \in V^*$ .

On définit les applications linéaires  $e(\eta) \otimes 1$  et  $1 \otimes m(\eta)$  comme il suit.

$$\begin{aligned} (e(\eta) \otimes 1)(\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k \otimes \eta_1 \dots \eta_\ell) &= \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k \wedge \eta \otimes \eta_1 \dots \eta_\ell, \\ (1 \otimes m(\eta))(\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k \otimes \eta_1 \dots \eta_\ell) &= \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k \otimes \eta \cdot \eta_1 \dots \eta_\ell. \end{aligned}$$

Rappelons la formule de définition de  $\partial$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{k-1,\ell+1} &\xrightarrow{\partial} \mathcal{C}^{k,\ell}, \\ \partial(\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_{k-1} \otimes \eta_1 \dots \eta_{\ell+1}) &= \sum_1^{\ell+1} (-1)^j \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_{k-1} \wedge \eta_j \otimes \eta_1 \dots \hat{\eta}_j \dots \eta_{\ell+1}. \end{aligned}$$

Maintenant, à partir de cette formule il est facile de vérifier la formule suivante

$$e(\eta) \otimes 1 = \partial \circ 1 \otimes m(\eta) + 1 \otimes m(\eta) \circ \partial.$$

Cette formule montre  $e(\eta) \otimes 1$  est homotope à l'application nulle.

Ce complexe de Koszul-Spencer a été à l'origine des avancées spectaculaires dans la géométrie formelle des SEDP. On a découvert entre autres qu'y habitent les obstructions à l'existence des solutions formelles des SEDP [16]. Il permis également une meilleure compréhension du théorème de Cartan-Kaehler et du théorème d'involutivité de Elie Cartan. Ce dernier théorème informe que parmi les SEDP beaucoup sont formellement intégrables à l'ordre supérieur, c'est à dire après un nombre fini de prolongements dans des variétés des jets. (Intuitivement cela fait penser à la désingularisation par éclatement successifs.) La clef réside dans l'involutivité qui assure que la cohomologie est triviale à partir d'un certain degré.

## **FIN DE LA PARTIE A.**

L'objectif de la [PARTIE A] est maintenant atteint. Un étudiant de troisième année d'université (niveau Bac+3) sait désormais ce qu'est l'HOMOLOGIQUE EFFECTIVE.

## DEBUT DE LA PARTIE B.

Maintenant le lecteur novice a compris ce qu'est l'homologie. La banale relation d'inclusion  $im(d) \subset k(d)$  a entrebâillé l'entrée d'une caverne dont un début d'exploration donne des vertiges : Le manège qu'est le triangle exact.

La partie B est une invitation à la réflexion sur la question **Pour Quoi Faire ?**

Le spectre de réponse est très large. Il balaye la quasi totalité de la mathématique et de la physique mathématique. Algèbre-Analyse-Géométrie-Topologie-Théorie de Jauge-Groupes quantiques...

Je vais survolé quelques complexes de chaine classiques et en signaler quelques utilisations des plus importantes. La géométrie de l'Information et celle des variétés statistiques sont concernées par les exemples choisis.

## 11 Quelques complexes de chaines et leur utilité.

cette section est consacrée à cinq complexes de chaine dont le spectre d'utilité est large. Des exemples d'utilisation seront signalés soit en Géométrie, soit en Analyse globale dans les variétés, soit en Topologie, soit en Physique. Je m'attarderai un peu plus sur les liens avec la Géométrie de l'information et la géométrie statistique [4].

### 11.1 COMPLEXE DE HOCHSCHILD.

A l'exception de quelques rares cas on peut remplacer espace vectoriel par module sur un anneau associatif. Les énoncés sont donnés dans ce cadre un peu plus général que les espaces vectoriels.

#### 11.1.1 Module sur un anneau.

Soit  $A$  un anneau associatif dont le produit est noté multiplicativement et  $V$  un groupe commutatif.

**Définition 11.1** Une structure  $A$ -bimodule dans  $V$  est la donnée d'une loi d'action à gauche de  $A$  dans  $V$

$$A \times V \rightarrow V$$

notée multiplicativement

$$(a, v) \rightarrow av$$

et d'une loi d'action à droite

$$V \times A \rightarrow V$$

notée multiplicativement

$$(v, a) \rightarrow va$$

jouissant des propriétés suivantes :  $\forall a, b \in A, \forall v \in V$

1.  $(ab)v = a(bv)$
2.  $v(ab) = (va)b$
3.  $((av)b = a(vb))$
4. Si l'anneau est unitaire alors l'élément unité noté 1 vérifie  $1v = v1 = v$   $\forall v \in V$ . Si l'action à gauche est nulle alors  $V$  est un module à droite (resp. si l'action à droite est nulle  $V$  est un  $A$ -module à gauche).

## EXEMPLES

1. Soit  $\mathbb{K}$  un corps. Tout espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  est module à gauche sur  $\mathbb{K}$ .
2. Tout groupe commutatif est un module à gauche sur l'anneau  $Z$  des nombres entiers.
3. L'espace des matrices colonnes à  $n$  lignes est un module à gauche sur l'anneau  $M(n, \mathbb{R})$  des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels.
4. L'espace des matrices lignes à  $n$  colonnes est un module à droite sur l'anneau  $M(n, \mathbb{R})$  des matrices carrées d'ordre  $n$ .

**Définition 11.2** Un homomorphisme de  $A$ -bimodule de  $V$  dans  $W$  est homomorphisme de groupe  $f$  de  $V$  dans  $W$  tel que  $f(av) = a(f(v))$  et  $f(va) = (f(v))a \forall v \in V, a \in A$ .

Soient  $V$  et  $W$  des bimodules sur  $A$ .

(1). Le produit tensoriel  $V \otimes W$  est un bimodule sur  $A$  pour les lois suivantes

$$a(v \otimes w) = av \otimes w + v \otimes aw,$$

$$(v \otimes w)a = v \otimes wa + va \otimes w.$$

(2). Le groupe  $Hom(V, W)$  des homomorphisme de groupe de  $V$  dans  $W$  est un bimodule sur  $A$  pour les actions suivantes

$$(af)(v) = a(f(v)) - f(av),$$

$$(fa)(v) = -f(va) + (f(v))a.$$

**Cohomologie de Hochschild** [8], [9].

A tout  $A$ -bimodule  $V$  on associe le  $A$ -module  $C(A, V)$   $Z$ -gradué par les sous-bimodules homogènes  $C^k(A, V)$  suivants

$$\begin{aligned}
C^k(A, V) &= 0 \quad \text{si } k \text{ est négatif,} \\
C^0(A, V) &= V, \\
C^k(A, V) &= \text{Hom}_Z(\otimes_Z^k(A), V) \quad \text{si } k \text{ est positif.}
\end{aligned}$$

On définit le  $Z$ -homomorphisme

$$d : C^k(A, V) \rightarrow C^{k+1}(A, V)$$

comme il suit

$$\begin{aligned}
dv(a) &= av - va \quad \forall v \in V, a \in A \\
df(a_1, \dots, a_{k+1}) &= a_1(f(a_2, \dots, a_k)) \\
&+ \sum_{1 \leq j \leq k} (-1)^j f(a_1, \dots, \hat{a}_j, a_j a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_{k+1}) \\
&+ (-1)^{k+1} (f(a_1, \dots, a_k)) a_{k+1}.
\end{aligned}$$

Le lecteur vérifiera par des calculs directs que

$$d^2 = 0.$$

On a ainsi la suite

$$\dots \rightarrow C^{k-1}(A, C) \rightarrow C^k(A, V) \rightarrow C^{k+1}(A, V) \rightarrow \dots$$

**Définition 11.3** *Le complexe de cochaîne  $(C(A, V), d)$  est le complexe de Hochschild de l'anneau  $A$  à coefficients dans le bimodule  $V$ .*

Le  $k^{\text{ième}}$  groupe de cohomologie de  $C(A, V)$  est noté  $HH^k(A, V)$ .

### A quoi ce complexe sert ?

Les complexes de Hochschild sont des outils puissants en topologie algébrique et en Physique (e.g. Quantification par déformation, cf travaux de M. Kontsevich [12] et autres).

Ces complexes fournissent des invariants dont beaucoup sont caractéristiques dans ce sens que ces invariants classifient à équivalence près les objets dont ils sont nés. Ci-dessous des exemples.

#### 11.1.2 Problème d'extension des structures de bimodule.

Le problème d'extension des structures de module est un problème où la cohomologie fournit des invariants caractéristiques.

Le problème est le suivant. On fixe deux bimodules  $V, W$  sur le même anneau  $A$ . On veut décrire certaines structures de  $A$ -bimodule dans le groupe

commutatif  $V \oplus W$ . Ces structures de  $A$ -bimodule particulières sont appelées extensions de  $W$  par  $V$ . L'exigence est que la suite exacte courte des groupes commutatifs

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\iota} V \oplus W \xrightarrow{p_2} W \longrightarrow 0$$

soit une suite exacte de bimodules sur  $A$ . Les applications en jeu sont définies par

$$\begin{aligned}\iota(v) &= (v, 0), \\ p_2(v, w) &= w.\end{aligned}$$

Le groupe  $V \oplus W$  possède une structure de  $A$ -bimodule naturelle qu'est la somme directe de bimodules sur  $A$ . Pour cette dernière la scission canonique

$$w \rightarrow (0, w) \in V \oplus W$$

est un  $A$ -homomorphisme.

Considérons une structure de bimodule dans  $V \oplus W$  autre que la structure somme directe des bimodules. Alors la scission

$$w \rightarrow (0, w)$$

n'est pas un  $A$ -homomorphisme. En d'autres termes si nous continuons ( par abus d'écriture) de noter multiplicativement les actions de  $A$  dans  $T = V \oplus W$  les différences

$$a(o, w) - (o, aw) , (o, w)a - (0, wa)$$

ne sont pas nulles.

Pour simplifier nous allons approfondir le cas des modules à gauche. Dans ce cas l'application

$$\theta_0(a, w) = a(0, w) - (0, aw)$$

$\forall a \in A, w \in W$  satisfait la relation suivante

$$a\theta_0(b, w) - \theta_0(ab, w) + \theta_0(b, aw) = 0.$$

Cette identité montre que l'application

$$a \rightarrow \theta_0(a, )$$

est un cocycle du complexe  $C(A, Hom_Z(W, V))$ .

Si on considère une autre scission

$$\nu : w \rightarrow (\nu(w), w)$$

il lui correspondra l'application

$$a \rightarrow \theta_\nu(a, )$$

donnée par

$$\theta\nu(a, w) = a\nu(w) - \nu(aw).$$

Un calcul direct montre que  $\theta\nu - \theta_0$  est un cobord, c'est à dire que les cocycles  $\theta_0$  et  $\theta\nu$  habitent la même classe de cohomologie dans  $HH^1(A, Hom_Z(W, V))$ . Ainsi à chaque structure de  $A$ -bimodule dans  $T$  qui induit par l'inclusion  $V \subset T$  et par la projection  $T \rightarrow W$  les structures de modules de départ est associée une classe de cohomologie  $[\theta] \in H^1(A, Hom_Z(W, V))$ .

La classe de cohomologie est caractéristique dans le sens qu'on va préciser.

**Définition 11.4** 1. Une structure  $T$  de  $A$ -module dans  $V \oplus W$  telle que l'application inclusion

$$V \subset V \oplus W$$

et la projection naturelle

$$V \oplus W \rightarrow W$$

sont des homomorphismes de  $A$ -module est appelée extension de  $W$  par  $V$ .

2. Deux extensions  $T$  et  $T'$  de  $W$  par  $V$  sont dites équivalentes s'il existe un homomorphisme de  $A$ -module  $f$  de  $T$  dans  $T'$  dont la restrictions à  $V$  est l'applique identité et qui se projette en l'application identité de  $W$ .

La classification à équivalence près des extensions de  $W$  par  $V$  est donnée par

**Théorème 11.1** L'ensemble  $Ext_A(W, V)$  des classes d'équivalence d'extension du  $A$ -module  $W$  par le  $A$ -module  $V$  est en correspondance bijective avec le groupe de cohomologie  $HH^1(A, Hom_Z(W, V))$ .

### 11.1.3 Problème d'extension de structure d'anneau.

Soient  $A, B$  des anneaux associatifs. Soit  $T = B \oplus A$  la somme directe des groupes commutatifs  $A$  et  $B$ . On a la suite exacte courte des groupes commutatifs

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\iota} T \xrightarrow{p_2} A \longrightarrow 0.$$

**Définition 11.5** 1. Une structure d'anneau associatif dans  $T$  telle que la suite courte ci-dessus soit une suite exacte d'anneaux associatifs est appelée une extension de l'anneau  $A$  par l'anneau  $B$ .

2. Soient  $T$  et  $T'$  des extensions de l'anneau de  $A$  par l'anneau  $B$ . Elles sont dites équivalentes s'il existe un homomorphisme d'anneau  $f$  de  $T$  sur  $T'$  dont la restriction à  $B$  est l'isomorphisme identité de  $B$  et l'application quotient est l'isomorphisme identité de  $A$ .

Notons  $T_0$  la structure produit direct (ou somme directe) des anneaux  $B \oplus A$ . La multiplication dans  $T_0$  est

$$(b, a)(b', a') = (bb', aa').$$

Soit  $T$  une extension distincte de  $T_0$ . L'application

$$\beta(a, a') = (0, a)(0, a') - (0, aa')$$

n'y est pas nulle. Cette application  $\beta$  prend ses valeurs dans l'idéal  $B$ . De l'associativité dans  $T$  on déduit que pour  $a, a', a'' \in A$  on a

$$a\beta(a', a'') - \beta(aa', a'') + \beta(a, a'a'') - \beta(a, a')a'' = 0.$$

Ici on n'est un peu démuni. Le traitement de cette expression à l'aide d'algèbre homologique est aisé lorsque  $B$  est un idéal de  $T$  satisfaisant  $bb' = 0 \quad \forall b, b' \in B$ .

Quand il en est ainsi l'application  $\beta$  est un cocycle de degré 2 de l'anneau  $A$  à valeurs dans  $B$ .

Si on remplace la scission

$$a \rightarrow (0, a)$$

par une autre scission

$$a \rightarrow (\nu(a), a)$$

on obtient une nouvelle application

$$(a, a') \rightarrow \beta_\nu(a, a') = \nu(a)\nu(a') - \nu(aa')$$

qui est aussi un cocycle habitant la même classe de cohomologie que  $\beta$ .

Ainsi la classe de cohomologie  $[\beta] \in H^2(A, B)$  ne dépend que de l'extension  $T$ . En outre deux extensions équivalentes  $T$  et  $T'$  déterminent la même classe de cohomologie dans  $H^2(A, B)$ . La classe de cohomologie de  $\beta$  est un invariant caractéristique de l'extension  $T$  dans le sens du théorème qui suit.

**Théorème 11.2** *Soit  $A$  un anneau associatif et  $B$  un  $A$ -module à gauche. Si on munit  $B$  de la structure d'anneau dont la multiplication est nulle alors il y a correspondance bijective entre l'ensemble  $\text{Ext}(A, B)$  des classes d'équivalence d'extension de l'anneau  $A$  par  $B$  et le groupe de cohomologie  $HH^2(A, B)$*

#### 11.1.4 DIGRESSIONS

Le lecteur peut sans conséquence s'abstenir de lire ces digressions.

Nous allons signaler d'autres perspectives de regard sur le groupe de (co)homologie. Nous développerons ces perspectives pour la KV (co)homologie qui présente de l'intérêt pour la géométrie de l'information. Il n'est cependant pas inopportun de signaler deux autres perspectives.

Soit  $G$  un groupe commutatif et  $\mathcal{A}(G)$  l'ensemble des structures d'anneau associatif dont le groupe commutatif sous-jacent est  $G$ . Cet ensemble est constitué des multiplications

$$\mu : G \otimes G \rightarrow G$$

jouissant de trois propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\mu(a, \mu(a', a'')) - \mu(\mu(a, a'), a'') &= 0, \\ \mu(a + a', a'') - \mu(a, a') - \mu(a, a'') &= 0, \\ \mu(a, a' + a'') - \mu(a, a') - \mu(a, a'') &= 0.\end{aligned}$$

Regardons le groupe commutatif  $G$  comme un module à gauche sur l'anneau  $Z$  des nombres entiers. Les propriétés ci-dessus signifient que la multiplication  $aa' = \mu(a, a')$  est  $Z$ -bilinéaire. Ainsi le couple  $(G, \mu)$  définit une structure de  $Z$ -algèbre associative dans  $G$ .

La première des identités portant sur  $\mu$  dit que  $\mu$  est un zéro d'un polynôme homogène de degré 2 à coefficients dans l'anneau  $Z$ . Ainsi l'ensemble  $\mathcal{A}(G)$  est l'ensemble des zéros d'un polynôme homogène à coefficients entiers en la variable  $\mu \in \text{Hom}_Z(G \times G, G)$ .

Définissons les notions suivantes dans  $\text{Hom}_Z(G \otimes_Z G, G)$ .

**Définition 11.6** 1. L'ensemble  $\mathcal{Z}(P) \subset \text{Hom}_{\mathbb{R}}(G \otimes G, G)$  des zéros d'un polynôme homogène  $P$  est appelé ensemble algébrique sur l'anneau  $Z$ . 2. Le complémentaire dans  $\text{Hom}_Z(G \otimes_Z G, G)$  d'un ensemble algébrique est appelé ouvert de Zariski dans  $\text{Hom}_Z(G \otimes G, G)$ .

Désormais  $\text{Hom}_Z(G \otimes_Z G, G)$  est muni de la topologie engendrée par les ouverts de Zariski.

Le groupe  $GL_Z(G, G)$  des automorphismes du groupe  $G$  opère dans  $\text{Hom}_Z(G \otimes_Z G, G)$  et y préserve le sous-espace topologique fermé  $\mathcal{A}(G)$ . Voici une perspective intuitive.

Soit  $A \in \mathcal{A}(G)$ . C'est une structure d'anneau associatif dans  $G$ .

La géométrie locale de la paire  $(A, \mathcal{A}(G))$  est contrôlée par les groupes de cohomologie  $HH^2(A, A)$  et  $HH^3(A, A)$ . J'y reviendrai plus loin mais je vais en donner quelques idées.

L'orbite de  $A$  sous l'action du groupe  $GL_Z(G, G)$  est une sous-variété de  $\mathcal{A}(G)$ . Cette orbite est la classe d'isomorphisme d'anneau du point  $A$ .

Ce que je vais affirmer manque de début de preuve mais acceptez le ne serait-ce que provisoirement.

- (1). Le groupe tangent à  $\text{Ass}(G)$  au point  $A$ ,  $T_A(\text{Ass}(G))$ , est le groupe des cocycles  $Z^2(A, A)$ .
- (2). Le sous-groupe tangent à l'orbite  $T_A(GL_Z(G, G)(A))$  est le groupe de cobords  $B^2(A, A)$ .

Modulo les affirmations (1) et (2) le groupe de cohomologie  $HH^2(A, A)$  est le groupe tangent transverse à l'orbite de  $A$ .

**Retour à la réalité**

## 11.2 COMPLEXE DE CHEVALLEY-EILENBERG.

Ce numéro concerne les algèbres de Lie (réelles ou complexes).

**Définition 11.7** Une algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  est un espace vectoriel avec une multiplication bilinéaire appelée crochet et notée

$$(a, b) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow [a, b] \in \mathcal{G}$$

qui vérifie les identités suivantes

$$[a, b] + [b, a] = 0,$$

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$$

quels que soient  $a, b, c \in \mathcal{G}$ .

**Définition 11.8** Une structure de  $\mathcal{G}$ -module dans un espace vectoriel  $V$  est la donnée d'une application bilinéaire

$$\mathcal{G} \times V \rightarrow V$$

notée multiplicativement

$$(a, v) \rightarrow av$$

telle que

$$a(bv) - b(av) - [a, b]v = 0$$

quels que soient  $a, b \in \mathcal{G}, v \in V$ .

### EXEMPLES

Voici des exemples d'algèbre de Lie.

(1). L'espace vectoriel  $M(n, \mathbb{R})$  des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels, avec le crochet

$$[a, b] = ab - ba$$

est une algèbre de Lie notée  $gl(n, \mathbb{R})$ .

(2). Le sous-espace  $sl(n, \mathbb{R})$  de matrices  $[m_{ij}]$  telle que  $\sum m_{ii} = 0$  est une sous-algèbre de Lie de  $gl(n)$  appelée algèbre linéaire spéciale.

(3). Le sous-espaces  $o(n)$  des matrices  $a \in sl(n, \mathbb{R})$  telle que  $a + a^t = 0$  où  $a^t$  est la matrice transposée de  $a$  est une sous-algèbre de Lie de  $sl(n)$ .

### COHOMOLOGIE

Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Lie et  $V$  un module sur  $\mathcal{G}$ .

Au couple  $(\mathcal{G}, V)$  on associe l'espace vectoriel  $Z$ -gradué par les sous-espaces vectoriels homogènes suivants

$$\begin{aligned} C^k(\mathcal{G}, V) &= 0 \quad \text{si } k \text{ est un nombre entier négatif.} \\ C^0(\mathcal{G}, V) &= V, \\ C^k(\mathcal{G}, V) &= \text{Hom}(\wedge^k \mathcal{G}, V) \quad \text{si } k \text{ est un nombre entier positif.} \end{aligned}$$

On définit l'application linéaire

$$C^k(\mathcal{G}, V) \xrightarrow{d} C^{k+1}(\mathcal{G}, V)$$

comme il suit :

$$\begin{aligned} dv(a) &= av \quad \forall a \in \mathcal{G}, v \in V. \\ df(a_0, \dots, a_k) &= \sum_0^k (-1)^j f(a_0, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_k) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f([a_i, a_j], \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_k). \end{aligned}$$

Un calcul direct conduit à  $d^2 = 0$ .

On obtient le complexe de cochaîne  $(C(\mathcal{G}, V), d) = (\sum_k C^k(\mathcal{G}, V), d)$ .

**Définition 11.9** [6] *Le complexe de cochaîne  $C(\mathcal{G}, V)$  est appelé complexe de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  à coefficients dans le  $\mathcal{G}$ -module  $V$ .*

*Son espace de cohomologie  $H(\mathcal{G}, V)$  est appelé cohomologie de Chevalley-Eilenberg de  $\mathcal{G}$  à coefficients dans  $V$ .*

### EXEMPLES.

(1). Considérons l'algèbre de Lie  $gl(n, \mathbb{R})$  comme module sur elle même.

On a

$$H^2(gl(n, \mathbb{R}), gl(n)) = 0.$$

La preuve de ce qui précède utilise la vérité suivante.

(2). Si  $V$  est un  $sl(n, \mathbb{R})$ -module non trivial alors

$$H^k(sl(n, \mathbb{R}), V) = 0$$

quel que soit le nombre entier positif  $k$ .

Les notions d'extension des  $\mathcal{G}$ -modules, celle d'extension d'algèbre de Lie sont définies mututis mutandis comme dans le cas des anneaux associatifs. Les interprétations des espaces de cohomologie  $H^1(\mathcal{G}, \text{Hom}(W, V))$ ,  $H^2(\mathcal{G}, V)$ ,  $H^2(\mathcal{G}, \mathcal{G})$  et  $H^3(\mathcal{G}, \mathcal{G})$  sont similaires à celles signalées dans le cas des modules sur des anneaux associatifs [11].

Je ne m'attarderai que sur des cas en prise directe avec la géométrie de l'information. C'est à venir.

### 11.3 COMPLEXE DE KOSZUL-SPENCER.

J'ai déjà défini ce complexe et dit pourquoi sa découverte a été d'une grande importance en analyse globale et en géométrie différentielle.

Dans ces notes je vais me limiter aux complexes de Spencer linéaire dans l'espoir qu'un analyste peu géomètre y voit la perspective géométrique de regard sur les symboles principaux des opérateurs différentiels.

Reprenons la définition des complexes de Koszul-Spencer. Ces sont des complexes bi-gradués en voici la description générale.

Soient  $V, W$  des espaces vectoriels et  $Hom(V, W)$  l'espace vectoriel des applications linéaires de  $V$  dans  $W$ . Soit  $A^k$  un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $S^k(V, W)$  des applications  $k$ -multi-linéaires symétriques de  $V$  dans  $W$ . (e.g. la valeur ponctuelle du symbole d'un opérateur différentiel d'ordre  $k$ .)

#### GEOMETRIE DE STERNBERG DE $A^k$ .

**Définition 11.10** *Le premier prolongement de  $A^k$  est noté  $(A^k)^1$ . C'est l'espace vectoriel formé des  $\sigma \in S^{k+1}(V, W)$  tels que*

$$\iota_v \sigma \in A^k \quad \forall v \in V.$$

Rappelons que

$$\iota_v \sigma(v_1, \dots, v_k) = \sigma(v, v_1, \dots, v_k).$$

Pour tout nombre entier non négatif  $\ell$  on définit par induction le prolongement d'ordre  $\ell + 1$  de  $A^k$  en posant

$$(A^k)^{\ell+1} = ((A^k)^\ell)^1.$$

#### Complexe bigradué $C_{KS}$ [13], [14].

On note  $C_{KS}$  l'espace vectoriel  $Z^2$ -bigradué par les sous-espaces vectoriels homogènes  $C^{p,q}(A^k)$  définis comme il suit :

$$C^{p,q}(A^k) = \wedge^p V^* \otimes (A^k)^q.$$

Dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus  $V^*$  est l'espace vectoriel dual de  $V$ . Ce membre de droite est contenu dans l'espace vectoriel

$$Hom(\wedge^p V \otimes S^{k+q} V, W)$$

des applications  $(k + p + q)$ -multi-linéaires  $f$  de  $V$  dans  $W$  jouissant de la propriété suivante,

$$f(v_1, \dots, v_p, t_1, \dots, t_{k+q})$$

est alternée par rapport aux  $p$  premières variables  $(v_1, \dots, v_p)$  et symétriques par rapport aux  $(k + q)$  dernières variables  $(t_1, \dots, t_{k+q})$ .

L'opérateur cobord de Koszul-Spencer

$$C^{p,q}(A^k) \xrightarrow{\partial} C^{p+1;q-1}(A^k)$$

est défini par la formule suivante

$$\partial f(v_1 \wedge v_2 \dots \wedge v_{p+1} \otimes t_1 \cdot t_2 \dots t_{k+q-1}) = \sum_1^{q-1} (-1)^j f(v_1 \wedge \dots \wedge \hat{v}_j \wedge \dots \wedge v_{p+1} \otimes v_j \cdot t_1 \dots t_{k+q-1})$$

Par des calculs directs on obtient facilement

$$\partial^2 = 0.$$

Le complexe de Koszul-Spencer a déjà été décrite dans PARTIE A. Rappelons néanmoins qu'étant données de formes linéaires

$$\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \eta_1, \dots, \eta_{\ell+1} \in V^*$$

on a

$$\partial(\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_{k-1} \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_{\ell+1}) = \sum_1^{\ell+1} \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_{k-1} \wedge \eta_j \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \hat{\eta}_j \dots \otimes \eta_{\ell+1}.$$

L'espace de cohomologie au niveau  $C^{p,q}(A)$  est noté  $H^{p,q}(A^k)$ .

## **SYMBOLES DES OPERATEURS DIFFERENTIELS.**

Le complexe de Koszul a été motivé par des questions en rapports avec les classes caractéristiques. Le point technique est le classique complexe de Koszul liés au module gradués des algèbres associatives graduées. Par exemples des modules gradués sur une algèbre des polynômes.

Beaucoup plus tard apparu le complexe de Spencer des opérateurs différentiels linéaires et la part de cette cohomologie due aux symboles de ces opérateurs. C'est Grothendieck qui signala à I.M. Singer et à S. Sternberg que la cohomologie de Spencer des symboles des opérateurs différentiels est le dual de la cohomologie de Koszul [14], [13].

Pour éviter les difficultés non essentielles à la compréhension je vais considérer des fibrés vectoriels  $E, F$  de même base  $X$ .

Soient  $\Gamma(E)$  et  $\Gamma(F)$  les espaces de leurs sections. Pour tout nombre entier positif  $k$  on note  $j^k$  l'application

$$\sigma \rightarrow j^k \sigma$$

de  $\Gamma(E)$  dans  $\Gamma(J^k(E))$ .

**Définition 11.11** *Une application*

$$\Gamma(E) \xrightarrow{D} \Gamma(F)$$

est un opérateur différentiel d'ordre  $k$  s'il existe un homomorphisme de fibré vectoriel

$$J^k(E) \xrightarrow{\mathcal{D}} F$$

tel que

$$D(\sigma) = \mathcal{D}(j^k \sigma)$$

quel que soit  $\sigma \in \Gamma(E)$ .

La notion d'opérateur différentiel linéaire est sans ambiguïté. Maintenant on considère le suite exacte des fibrés vectoriels

$$\tilde{J}(E) \xrightarrow{\iota} J^k(E) \xrightarrow{\pi^k} J^{k-1}(E) \longrightarrow 0.$$

**Définition 11.12** *L'application*

$$\sigma(D) = \mathcal{D} \circ \iota$$

de  $\tilde{J}^k(E)$  dans  $F$  est appelée symbole de l'opérateur différentiel  $D$ .

Il est facile de voir que  $\sigma(D)$  est une section du fibré vectoriel  $S^k T^* X \otimes E$ . On construit un fibré vectoriel  $C_{KS}$  de base  $X$  dont la fibre au-dessus de  $x \in X$  est

$$C_{KS}(x) = \wedge^k T_x^* X \otimes S^\ell T^* X \otimes E^* \otimes F.$$

Un élément de la fibre  $(C_{KS}(D))(x)$  est une application  $k + \ell$ -multi-linéaire de  $T_x X$  dans  $\text{Hom}(E_x, F_x)$  qui est alternée par rapport aux  $k$  premiers arguments et symétrique par rapport aux  $\ell$  arguments.

Au-dessus de  $x \in X$  l'espace vectoriel bi-gradué par les  $(C_{KS}(D))(x)$  est un complexe de Koszul-Spencer.

On obtient ainsi un fibré vectoriel  $C_{KS}(D)$  dont les fibres sont les complexes de Koszul-Spencer. Le fibré de cohomologie correspondant  $H^{p,q}(D)$  est en général singulier. Maintenant on fixe une section  $\alpha \in \Gamma(F)$  on cherche au point  $x \in X$  les solutions formelles de l'équation

$$D(\sigma) = \alpha.$$

Les obstruction à l'existence des telles solutions habite l'espace de cohomologie

$$H_{KS}(D)(x) = \sum_{p,q} H_{KS}^{p,q}(D)(x).$$

Le théorème d'involutivité dont j'ai parlé allusivement dit que pour beaucoup d'opérateurs différentiels  $D$  tous les  $H_{KS}^{p,q}(D)$  sont nuls au delà d'un certain nombre entier  $q(D)$ .

**FIN DE LA PARTIE B.**

## 11.4 KV COMPLEXES ABSTRAITS.

Parmi les divers types de complexes de chaîne définis dans cette note les KV complexes sont ceux qui ont des liens directs profonds avec la géométrie de l'Information Statistique. Je vais juste les décrire mais il contient la version homologique des nombreux aspects de la Géométrie de l'Information telle qu'elle est traitée dans la Monographie par S. Amari et H.Nagaoka [4].

Je vais commencer par des considérations purement algébriques [19], [22].

**Définition 11.13** *Une algèbre de Koszul-Vinberg (ou KV algèbre pour faire court,) est une algèbre  $A$  dont la multiplication notée*

$$(a, a') \rightarrow aa'$$

*satisfait l'axiome suivant*

$$(a, a', a'') = (a', a, a'')$$

*où*

$$(a, a', a'') = (aa')a'' - a(a'a'').$$

L'associateur  $(a, a', a'')$  qui est une fonction tri-linéaire est symétrique par rapport aux deux premières variables de gauche. C'est pourquoi les KV algèbres sont aussi appelées algèbre symétrique à gauche. On trouve également la terminologie algèbre pré-Lie mais ces appellations n'ont pas de significations géométriques pertinentes.

### EXEMPLES de KV algèbre.

1. Les algèbres associatives.
2. Les sections différentiables du fibré tangent  $TX$  d'une variété localement plate  $X$ .

### KV MODULE

Soit  $A$  une KV algèbre et  $V$  un espace vectoriel.

**Définition 11.14** *Une structure de KV  $A$ -module dans  $V$  est la donnée des deux lois d'action de  $A$  dans  $V$*

$$A \times V \rightarrow V,$$

$$V \times A \rightarrow V,$$

*ces lois notées multiplicativement doivent satisfaire les axiomes suivants*

$$(a, a', v) - (a', a, v) = 0,$$

$$(a, v, a') - (v, a, a') = 0.$$

Dans la définition ci-dessus

$$(a, a', v) = (aa')v - a(a'v) - (a'a)v + a'(av),$$

$$(a, v, a') = (av)a' - a(va') - (va)a' + v(aa').$$

Voici des exemples des KV modules sur des KV algèbres.

1. Une KV algèbre  $A$  est un KV module sur  $A$ .
2. Soit  $\nabla$  une connexion de Koszul sans torsion ni courbure dans une variété  $X$ . Les section de  $TX$  munies de la multiplication  $\nabla$  est une KV algèbre notée  $A_\nabla$ . L'espace  $\Omega(X)$  des formes différentielles dans  $X$  est un KV module sur  $A_\nabla$ .

La notion de KV module à gauche (resp. KV module à droite) ne souffre pas d'ambiguïté.

Soit  $V$  un KV module sur une KV algèbre  $A$ .

**Définition 11.15** *Un élément de  $v$  du KV module  $V$  est appelé élément de Jacobi si  $(a, a', v) = 0 \forall a, a' \in A$ .*

Le sous-espace des éléments de Jacobi de  $V$  est noté  $J(V)$ .  
Voici des exemples.

1. Si  $A$  est une algèbre associative alors  $J(A) = A$ .
2. Si  $A_\nabla$  est la KV algèbre d'une connexion de Koszul  $\nabla$  localement plate alors  $J(C^\infty(X))$  est l'espace des fonctions dites affines. Ce sont les fonctions dont la dérivé covariante seconde est nulle.
3. Si  $A$  est la KV algèbre de l'exemple 2 ci-dessus alors  $J(A)$  est l'espace des transformations affines infinitésimales de la variété localement plate  $(X, \nabla)$ .

Le produit tensoriel  $V \otimes W$  de deux bimodules  $V$  et  $W$  est un bimodule sous les actions suivantes

$$a(v \otimes w) = av \otimes w + v \otimes aw,$$

$$(v \otimes w)a = v \otimes wa$$

quelque soient  $v \in V, w \in W$ .

L'espace vectoriel  $Hom(V, W)$  des applications linéaires de  $V$  dans  $W$  est un bimodule sous les actions suivantes

$$(af)(v) = a(f(v)) - f(av),$$

$$(fa)(v) = (f(v))a$$

quelque soient  $f \in Hom(V, W), a \in A, v \in V$ .

## COMPLEXE

A tout KV bimodule  $V$  sur une KV algèbre  $A$  on attache l'espace vectoriel  $C(A, V)$  qui est  $Z$ -gradué par les sous-espaces vectoriels homogènes suivants.

$$\begin{aligned} C^k(A, V) &= 0 \quad \text{si } k \text{ est un nombre entier négatif} \\ C^0(A, V) &= J(V) \\ C^k(A, V) &= \text{Hom}(\otimes^k A, V) \quad \text{si } k \text{ est un nombre entier positif.} \end{aligned}$$

**Définition 11.16** *On définit l'application linéaire*

$$\delta : C^k(A, V) \rightarrow C^{k+1}(A, V)$$

*comme il suit.*

$$\begin{aligned} (\delta v)(a) &= -av + va \quad \forall a \in A, v \in J(V) \\ (\delta f)(a_1, \dots, a_{k+1}) &= \sum_{1 \leq j \leq k} (-1)^j [a_j (f(a_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_{k+1})) \\ &\quad - \sum_{i \neq j} f(\dots, \hat{a}_j, \dots, a_j a_i, \dots, a_{k+1}) \\ &\quad + (f(a_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_k, a_j)) a_{k+1}] \end{aligned}$$

L'opérateur ainsi défini vérifie  $\delta^2 = 0$ .

On a ainsi un complexe de cochaîne  $(C(A, V), \delta)$  dont l'espace de cohomologie

$$H_{KV}(A, V) = \sum_k H_{KV}^k(A, V)$$

est appelée espace de KV cohomologie de  $A$  à coefficients dans  $V$ .

Soit  $X$  une variété localement plate et  $A$  sa KV algèbre des champs de vecteurs différentiables. L'espace vectoriel  $\Omega(X)$  des formes différentielles est un KV module de  $A$ . Nous verrons que l'espace de cohomologie  $H^2(A, \Omega)$  joue un rôle important en géométrie de l'information. A titre d'illustration, les métriques de Fisher des modèles statistiques dérivent des 1-cocycles dans  $C^1(A, \Omega)$ .

Cette lecture des tenseurs métrique de Fisher éclaire aussi le célèbre théorème d'invariance de Chentsov. La KV cohomologie fournit des outils d'une bonne compréhension des  $\alpha$ -connexions si on les regarde comme des déformations des connexions sans torsion dans certains espaces des connexions linéaires. La KV cohomologie est née des préoccupations classiques. Problèmes d'extension des modules, de KV algèbres. Problème des déformations et son avatar qu'est la théorie de quantification par de déformation.

### 11.4.1 Problème d'extension des structures de KV algèbre.

Soient  $A$  et  $B$  des KV algèbres. Soit  $T = B \oplus A$  la somme directe des espaces vectoriels sous-jacents. L'énoncé du problème d'extension de KV algèbre est analogue à celui d'extension des anneaux associatifs ou des algèbres de Lie. Il s'agit de décrire l'ensemble des structures de KV algèbre dans  $T$  telles que la suite exacte

$$O \rightarrow B \rightarrow T \rightarrow A \rightarrow 0$$

soit une suite exacte de KV algèbres.

La KV cohomologie y joue un grand rôle si on se limite au cas où la multiplication de  $B$  est nulle. L'existence d'une suite exacte de KV algèbres

$$0 \rightarrow B \rightarrow T = B \oplus A \rightarrow A \rightarrow O$$

détermine dans  $B$  une structure de  $A$ -bimodule.

Nous supposons que  $T$  est distincte de la KV algèbre somme directe  $T_0$  dont la multiplication est donnée par

$$(b, a)(b', a') = (0, aa')$$

pour  $(b, a), (b', a') \in B \oplus A$ .

Sous cette condition sur  $T$  l'application bi-linéaire  $\beta_0 \in \text{Hom}(A \times A, B)$  définie par

$$\beta_0(a, a') = (0, a)(0, a') - (0, aa')$$

n'est pas l'application nulle.

De l'axiome

$$((0, a), (0, a'), (0, a'')) - ((0, a'), (0, a), (0, a'')) = 0$$

découle que  $\beta_0$  est un 2-cocycle du KV complexe  $C_{KV}(A, B)$ .

Lorsque l'on remplace la scission triviale

$$a \rightarrow (0, a)$$

par une autre scission

$$a \rightarrow (\nu(a), a)$$

on obtient le cocycle

$$\beta_\nu(a, a') = (\nu(a), a)(\nu(a'), a') - (0, aa').$$

Ce nouveau cocycle habite la même classe de cohomologie que le cocycle  $\beta_0$ . Ainsi la classe de cohomologie  $[\beta_0] \in H_{KV}^2(A, B)$  ne dépend que de la KV structure  $T$ .

La notion d'équivalence de deux KV structures  $T, T'$  est similaire à celles qui ont été définies pour les extensions d'anneau et d'algèbre de Lie. Nous la rappelons

**Définition 11.17** Soient  $A$  et  $B$  des KV algèbres. On suppose que la multiplication dans  $B$  est nulle.

Deux extensions  $T$  et  $T'$  de la KV algèbre  $A$  par la KV algèbre  $B$  sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme de KV algèbre de  $T$  sur  $T'$  dont la restriction à  $B$  est l'identité et dont le quotient est l'identité de  $A$ .

**Théorème 11.3** Soit  $A$  une KV algèbre et  $B$  un  $A$ -bimodule muni de la structure de KV algèbre triviale. Il y a correspondance bijective entre l'ensemble  $Ext(B, A)$  des classes d'équivalence d'extension de la KV algèbre  $A$  par la KV algèbre triviale  $B$  et l'espace de cohomologie  $H_{KV}^2(A, B)$

#### 11.4.2 Problème d'extension des structures de KV module.

Soient  $V$  et  $W$  des KV modules de la même KV algèbre  $A$ .

**Définition 11.18** Une extension du KV module  $W$  par le KV bimodules  $V$  est une structure de  $A$ -bimodule dans la somme directe  $T = W \oplus V$  telle la suite l'inclusion  $V \subset T$  et la projection sur  $W$  parallèlement à  $V$  déterminent la suite exacte des KV bimodules

$$0 \rightarrow V \rightarrow T \rightarrow W \rightarrow 0.$$

La définition de la relation d'équivalence de deux extensions de KV bimodule est similaire à celle de l'équivalence de deux extensions de modules sur un anneau associatif ou sur une algèbre de Lie.

Contrairement au cas des modules sur les anneaux associatifs ou sur les algèbre de Lie l'ensemble des classes d'équivalence d'extension de  $W$  par  $V$  n'est pas paramétré par  $H_{KV}^1(A, Hom(W, V))$ . Il faut utiliser des objets plus élaborés ( en occurrence une suite spectrale)[22].

En Géométrie de l'information on rencontrera des situations dans lesquelles peuvent être utiliser des outils venant de la KV cohomologie.

Il n'est pas inopportun de souligner l'étendu des notions nécessaires à une lecture enrichissante de la Monographie Methods of Information Geometry par S. Amari et H. Nagaoka. Une lecture approfondie de cette monographie nécessite une maîtrise de diverses perspectives de vision des structures de variété. Ces notes ont été écrites dans ce but. Je vais ci-dessus illustrer mes affirmations par des exemples.

### QUELQUES ILLUSTRATIONS

(1). Le théorème d'invariance de domaine de Chentsov est en fait soit un changement de paramétrisation soit un changement de carte locale dans la sens que nous avons précisé dans la partie de ces notes consacrée aux perspectives de regard sur les structures géométriques.

- (2). Les ponts potentiels entre d'une part la topologie différentielle (Feuilletages), d'autre part des objets de la Géométrie de l'Information liés à la métrique de Fisher ont leurs piliers dans la KV cohomologie des variétés localement plates et dans la convexité de Koszul.
- (3). Les notions des tests d'ordre supérieur devraient être traités sous la perspective des Structures Géométriques d'ordre supérieur.

## DIGRESSIONS

Envisagez un phénomène dans une variété feuilletée qui serait concentré dans les feuilles du feuilletage. Une question assez vague est de pouvoir contrôler transversalement ce phénomène.

Un exemple discrétisé est le feuilletage d'une population en tranche d'opinion homogène sur un sujet. Le contrôle transversal du phénomène est le vouloir comprendre (ou paramétrer) l'évolution de l'opinion d'une feuille aux feuilles voisines.

### 11.4.3 Polynôme de Maurer-Cartan des KV algèbres.

Les  $\alpha$ -connexions sont des objets de la géométrie de l'information. Comme on le verra ce sont des déformations dans l'espace des connexions linéaires d'une connexion de Koszul qui contrôle la géométrie du modèle statistique. Ces connexions sont paramétrées par des 2-cochaines d'un KV complexe. La connexion de Fisher en est une. La courbure d'une connexion linéaire est une valeur du polynôme de Maurer-Cartan.

Une autre raison qui milite en faveur de ce polynôme est qu'il contrôle toutes les structures localement plates via la théorie des anomalies.

Dans cette sous-section  $A$  est une KV algèbre fixée. L'algèbre des commutateurs de  $A$  est l'espace vectoriel sous-jacent à  $A$  muni du crochet suivant

$$[a, a'] = aa' - a'a.$$

C'est une algèbre de Lie.

Pour  $\mu \in \text{Hom}(A \times A, A)$  on note  $A_\mu$  la structure d'algèbre dont la multiplication est  $a.a' = \mu(a, a')$ .

**Définition 11.19** *La KV anomalie  $KV(\mu)$  de l'algèbre  $A_\mu$  est l'application tri-linéaire de  $A$  dans  $A$  définie par*

$$KV(\mu)(a, a', a'') = (a, a', a'')_\mu - (a', a, a'')_\mu$$

avec

$$(a, a', a'')_\mu = \mu(\mu(a, a'), a'') - \mu(a, \mu(a', a''))$$

La KV anomalie  $KV_\mu$  est l'obstruction à ce que  $A_\mu$  soit une KV algèbre. Posons maintenant  $\nu(a, a') = \mu(a, a') - aa'$ . Une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  et  $A_\mu$  aient la même algèbre des commutateurs est

$$\nu(a, a') = \nu(a', a).$$

**Définition 11.20** *Tout 2-cochaine  $\nu \in C^2(A, A)$  est appelé un déformation de la KV algèbre  $A$ .*

**Définition 11.21** *Le polynôme de Maurer-Cartan de la KV algèbre  $A$  est l'application*

$$PM : C^2(A, A) \rightarrow C^3(A, A)$$

*définie par  $PM(\nu) = -d\nu + KV(\nu)$*

**Théorème 11.4** *Notons  $\mathcal{KV}(V)$  l'ensemble des KV algèbres dont l'espace vectoriel sous-jacent est  $V$ . Soit  $A \in \mathcal{KV}(V)$  et  $PM_A$  le polynôme de Maurer-Cartan de  $A$ .*

*Il y a correspondance bijective entre  $\mathcal{KV}(V)$  et l'ensemble des zéros de  $PM_A$ .*

La section suivante est consacrée aux objets en prise directe avec la Géométrie de l'Information.

## 12 DEFORMATIONS DES VARIETES LOCALEMENT PLATES ET HYPERBOLICITE .

Les objets qui nous occupent dans cette section sont les connexions linéaires. Nous en avons donné plusieurs présentations. Naturellement suivant le type des questions à l'étude certaines présentations seront plus efficaces que d'autres.

A chaque connexion linéaire on a attaché les données suivantes

1. la 2-forme de courbure  $\Omega = D\omega$ ,
2. la 2-forme de torsion  $\Theta = D\theta$
3. le tenseur de courbure  $R_{\nabla}$
4. le tenseur de torsion  $T_{\nabla}$ .

Ces objets attachés aux connexions linéaires sont des ceux utilisés en géométrie de l'information et en géométrie statistique.

### 12.1 STRUCTURE DE VARIETE LOCALEMENT PLATE.

versus structure géométrique.

**Proposition 12.1** *Soit  $\mathcal{H}$  une connexion (linéaire) principale et  $\nabla$  sa version connexion de Koszul.*

(1). *La 2-forme de torsion  $\Theta$  est nulle si et seulement si le tenseur de torsion  $T_{\nabla}$  est nul.*

(2). *La 2-forme de courbure  $\Omega$  est nulle si et seulement si le tenseur de courbure  $R_{\nabla}$  est nul.*

**Définition 12.1** *Une connexion linéaire est localement plate si ses 2-formes de courbure et de torsion sont nulles.*

**Définition 12.2** *Une structure de variété localement plate est un couple  $(X, \nabla)$  où  $\nabla$  est une connexion linéaire localement plate dans la variété  $X$ .*

### 12.2 Structure de variété localement plate.

versus structure d'espace annelé.

Pour étudier les déformations des structures localement plates dans une variété  $X$  il est plus confortable de placer la structure différentiable de  $X$  sous la perspective de sa structure d'espace fonctionnel.

A difféomorphisme près la structure différentiable de  $X$  est définie par son

anneau structural  $\mathcal{F}(X)$ . Les points de  $X$  sont identifiés aux idéaux maximaux de l'anneau  $\mathcal{F}(X)$ .

Les champs de vecteurs différentiables sont des automorphismes infinitésimaux de  $\mathcal{F}(X)$ , c'est à dire les dérivations de l'algèbre  $\mathcal{F}(X)$ .

Cette sous-section est placée sous la perspective d'espace fonctionnel.

La caisse à outils pour tout faire contient les deux seuls outils que sont l'anneau structural  $\mathcal{F}(X)$  et l'espace vectoriel  $\mathcal{X}(X)$  des dérivations de l'anneau  $\mathcal{F}(X)$ .

La composition  $\xi \circ \zeta$  de deux dérivations de  $\mathcal{F}(X)$  **n'est pas une dérivation** de  $\mathcal{F}(X)$  par contre leur commutateur

$$[\xi, \zeta] = \xi \circ \zeta - \zeta \circ \xi$$

est une dérivation de  $\mathcal{F}(X)$ .

Puisque le commutateur de deux dérivations de  $\mathcal{F}(X)$  en est une le couple

$$A(X) = (\mathcal{F}(X), [,])$$

est une algèbre de Lie. Lorsque la variété  $X$  est compacte  $A(X)$  est grosso modo l'algèbre de Lie du groupe de Lie infini des  $\mathbb{R}$ -automorphismes de l'anneau structural  $\mathcal{F}(X)$ .

## NOTION D'ANOMALIE

L'ensemble  $\mathcal{M}(X)$  des structures de  $\mathbb{R}$ -algèbre dans l'espace vectoriel  $\mathcal{X}(X)$  est l'ensemble des applications  $R$ -bilinéaires

$$\mathcal{X}(X) \times \mathcal{X}(X) \xrightarrow{\mu} \mathcal{X}(X).$$

Gardons en mémoire que  $\mathcal{X}(X)$  est un module à gauche de l'anneau structural  $\mathcal{F}(X)$ . A chaque multiplication  $\mu \in \mathcal{M}(X)$  on associe les trois anomalies suivantes.

(1). La KV-anomalie de  $\mu$  notée  $KV(\mu)$  et définie par

$$KV(\mu)(\xi, \zeta, \eta) = (\xi, \zeta, \eta)_\mu - (\zeta, \xi, \eta)_\mu,$$

(2). L'anomalie de Leibniz de  $\mu$  notée  $L(\mu)$  et définie par

$$L(\mu)(\xi, f, \zeta) = \mu(\xi, f\zeta) - f\mu(\xi, \zeta) - \xi(f)\zeta,$$

(3). La torsion de  $\mu$  notée  $T(\mu)$  et définie par

$$T(\mu)(\xi, \zeta) = \mu(\xi, \zeta) - \mu(\zeta, \xi) - \mu(\xi \circ \zeta - \zeta \circ \xi)$$

quels que soient  $\xi, \zeta \in \mathcal{X}(X)$ ,  $f \in \mathcal{F}(X)$ .

**Définition 12.3** Une connexion linéaire dans  $X$  est une multiplication  $\mu \in \mathcal{M}(X)$  jouissant des deux propriétés qui suivent. Quels que soient  $\xi, \zeta \in \mathcal{X}(X)$ ,  $f \in \mathcal{F}(X)$  on a

$$\mu(f\xi, \zeta) - f\mu(\xi, \zeta) = 0,$$

$$L(\mu)(\xi, f, \zeta) = 0.$$

## EXEMPLES

(1). Dans  $X = \mathbb{R}$  muni de la cordonnée canonique  $x$ , le  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ -module  $\mathcal{X}(\mathbb{R})$  est engendré par la dérivation ordinaire  $\frac{d}{dx}$ . Chaque connexion linéaire  $\mu$  dans  $R$  est définie par une fonction  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  suivant la formule

$$\mu\left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dx}\right) = f\frac{d}{dx}.$$

(2). On considère le demi-plan ouvert  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$ . Une base du  $\mathcal{F}(X)$ -module  $\mathcal{X}(X)$  est la paire  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ .

On définit dans  $\mathcal{X}(X)$  une multiplication  $\mathbb{R}$ -bilinéaire  $\mu$  en posant

$$\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \mu\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0.$$

$$\mu\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}.$$

La KV anomalie  $KV(\mu)$  ainsi que la torsion  $T(\mu)$  sont nulles.

L'algèbre de Lie des commutateurs  $(\mathcal{X}(X), [, ]_\mu)$  est l'algèbre de Lie des endomorphismes affines de la droite réelle  $\mathbb{R}$ .

**Définition 12.4** Une structure de variété localement plate dans  $X$  est une connexion  $\mu \in \mathcal{M}(X)$  telle que  $KV(\mu) = 0$  et  $T(\mu) = 0$ .

## DYNAMIQUE

(1). Le groupe  $\mathcal{G}(X) = \text{Aut}(\mathcal{F}(X))$  des  $\mathbb{R}$ -automorphismes de l'anneau structural opère effectivement dans les ensembles ci-dessous désignés.

Il opère dans  $\mathcal{X}(X)$  suivant la formule

$$\phi(\xi)(f) = \xi(\phi(f)).$$

Il opère dans  $\mathcal{M}(X)$  suivant la formule

$$\phi(\mu)(\xi, \zeta) = \phi(\mu(\phi^{-1}(\xi), \phi^{-1}(\zeta))).$$

(2). Les anomalies sont des invariants de la  $\mathcal{G}(X)$ -géométrie dans  $\mathcal{M}(X)$ .

Il résulte de (2) que l'action de  $\mathcal{G}(X)$  dans  $\mathcal{M}(X)$  préserve les sous-ensembles suivants :

- (a) Le sous-espace vectoriel des connexions linéaires dans  $X$ .
- (b) Le sous-ensemble convexe  $\mathcal{T}_0(X)$  formé des connexions linéaires dont la torsion est nulle.
- (c) Le sous-ensemble  $\mathcal{KV}(X)$  des connexions localement plates.

## DES ENSEMBLES ALGEBRIQUES REMARQUABLES

La partie convexe formée des connexions dont la torsion est nulle et son sous-ensemble formé des connexions localement plates sont des sous-ensembles algébriques de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}(X)$ .

L'étude des déformations des connexions sans torsion est grand chantier pratiquement....vierge.

Raghunathan s'y est essayé dans les années de sa jeunesse.

Nijenhuis, Koszul, Gerstenhaber, Vinberg et l'école soviétique ont esquissé l'étude des déformations de connexions localement plates.

Une conjecture de M. Gerstenhaber proclame que toute théorie restreinte des déformations génère sa propre théorie de cohomologie. Lorsque cette conjecture est vraie pour un type de structure mathématique alors les déformations y sont rigoureusement contrôlées par les classes de cohomologie de degré 1, 2 et 3 [19].

La manette de ce contrôle est le polynôme de Maurer-Cartan du complexe de cohomologie ad hoc.

On va appliquer ce principe à la géométrie de la variété singulière  $\mathcal{KV}(X)$ . La raison est qu'on dispose à présent d'une théorie de cohomologie qui naguère faisait défaut.

Les références sont [18], [20][19],[21],[22].

Je me propose dans ces notes d'utiliser uniquement l'aspect intéressant pour les géométries de l'information et des variétés statistiques [4].

## 13 ESQUISSE D'UNE KV-TOPOLOGIE DE $\mathcal{KV}(X)$ .

J'ai signalé que  $\mathcal{KV}(X)$  est un sous-ensemble algébrique de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}(X)$ . C'est une variété algébrique singulière. Parceque la dimension des espaces vectoriels en jeu est infinie seule la topologie de Zariski y est rendue confortable grâce à la théorie de KV (co)homologie.

A tout point  $A \in \mathcal{KV}(X)$  on va associer plusieurs  $A$ -modules canoniques. Je vais dans un premier temps décrire trois KV complexes. Dans un second temps je vais en signaler d'importantes utilisations potentielles.

(1). L'algèbre  $A$  est un bimodule sur elle même. On associe à ce module le KV complexe

$$C_{KV}(A, A).$$

(2). L'espace vectoriel  $\mathcal{F}(X)$  est un  $A$ -module à gauche. On lui associe le KV complexe scalaire

$$C_{KV}(A, \mathcal{F}(X)).$$

(3). L'espace vectoriel  $A \oplus \mathcal{F}(X)$  est une KV algèbre dont la multiplication est définie par

$$(a, f)(a', f') = (aa', ff' + a(f')).$$

On observe que les espaces vectoriels  $A$  et  $\mathcal{F}(X)$  sont respectivement un idéal à gauche et un idéal bilatère de la KV algèbre  $A \oplus \mathcal{X}(X)$ .

On lui associe les trois complexes de cochaîne.

(a) Le KV complexe

$$C_{KV}(A \oplus \mathcal{F}(X), A \oplus \mathcal{F}(X)),$$

(b) Le KV complexe

$$C_{KV}(A \oplus \mathcal{F}(X), A).$$

(c) le KV complexe

$$C_{KV}(A \oplus \mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X)).$$

Nous allons discuter de quelques utilisations de chacun des ces complexes.

### 13.1 QUELQUES UTILISATIONS DE $C(A, A)$ .

Dans ce qui suit  $A \in \mathcal{KV}(X)$  est fixé une fois pour toutes. Pour interpréter certains espaces de cohomologie de  $C_{KV}(A, A)$  je vais faire quelques rappels.

Notons  $\mathcal{F}^3(X)$  l'espace vectoriel des applications  $\mathbb{R}$ -trilinéaire

$$\mathcal{X}^3(X) \rightarrow \mathcal{X}(X).$$

Pour  $\mu \in \mathcal{M}(X)$  la KV anomalie  $KV(\mu)$  est un élément de  $\mathcal{T}^3(X)$ . Rappelons que  $KV(\mu)$  est définie comme il suit. Pour des éléments  $a, b, c \in \mathcal{X}(X)$  on pose

$$KV(\mu)(a, b, c) = (a, b, c)_\mu - (b, a, c)_\mu$$

où  $(a, b, c)_\mu$  est l'associateur de  $\mu$  défini par

$$(a, b, c)_\mu = \mu(\mu(a, b), c) - \mu(a, \mu(bc)).$$

L'application

$$\mu \rightarrow KV(\mu)$$

est polynomiale homogène de degré 2.

J'ai défini les actions naturelles du groupe  $\mathcal{G}(X)$  dans  $\mathcal{KV}(X)$ .

Notons respectivement  $\mathcal{G}(X)(A)$  et  $\mathcal{G}(X)_A$  l'orbite et le sous-groupe stabilisateur du point  $A \in \mathcal{KV}(X)$ . Ce dernier est un fermé de Zariski de  $\mathcal{M}(X)$ .

Une remarque d'importance est que  $\forall \mu \in \mathcal{KV}(X)$  le sous-groupe stabilisateur  $\mathcal{G}_\mu(X)$  est un groupe de Lie de dimension finie dont l'algèbre de Lie est l'espace des 0-cochaines

$$C_{KV}^0(\mu) = J(A_\mu).$$

On munit donc  $\mathcal{KV}(X)$  de la topologie de Zariski, (par définition les parties ouvertes sont les complémentaires des sous-ensemble algébriques ).

On veut comprendre la topologie de Zariski de  $\mathcal{KV}(X)$  au voisinage du point  $A$ . Il faut noter que les informations *géométriques* recueillies au voisinage de  $A$  descendent dans le module

$$\frac{\mathcal{KV}(X)}{\mathcal{G}(X)} \dots$$

### 13.1.1 Problème de convexité directionnelle.

Je rappelle que  $A = (\mathcal{X}(X), \mu_0)$ , et que  $\mu_0 \in \mathcal{KV}(X)$ . Souvent j'écrirai  $A \in \mathcal{KV}(X)$  au lieu de  $\mu_0 \in \mathcal{KV}(X)$ .

Des pratiques et notions venant du calcul différentiel (e.g. développements limités) et d'autres venant de la géométrie différentielle (e.g. connexion principale, connexion de Ehresmann) provoquent (ou suggèrent) deux curiosités.

1. Examiner l'espace tangent de Zariski  $T_A \mathcal{KV}(X)$ .
2. Evaluer le défaut de convexité directionnelle locale au point  $A$  de  $\mathcal{KV}(X)$ .

Le problème de convexité directionnelle locale au point  $A$  est la recherche des points  $\mu \in \mathcal{KV}(X)$  tels que le vecteur d'origine  $\mu_0$  et d'extrémité  $\mu$  soit inclu dans  $\mathcal{KV}(X)$ , i.e.

$$\mu_0 \vec{\mu} \subset \mathcal{KV}(X).$$

Géométriquement le vecteur  $\mu_0 \vec{\mu} \subset \mathcal{T}_0(X)$  est la courbe de image support du chemin

$$t \in [0, 1] \rightarrow \mu_0 + t(\mu - \mu_0) \in C_{KV}^2(A, A).$$

En terme du complexe de cochaîne  $C_{KV}(A, A)$  le problème de convexité locale au point  $A$  ci-dessus équivaut au comptage des solutions des zéros du polynômes de Maurer-Cartan sur le vecteur  $\mu_0 \vec{\mu}$ .

Je rappelle que les données géométriques sont les suivantes.

(a). L'espace tangent  $T_{\mu_0} \mathcal{KV}(X)$  est l'espace vectoriel  $Z^2(A)$  des 2-cocycles du complexe  $C_{KV}(A, A)$ .

(b). L'espace tangent à l'orbite  $T_{\mu_0} \mathcal{G}(X)(A)$  est l'espace vectoriel  $B^2(A)$  des 2-cobords du complexe  $C_{KV}(A, A)$ . On voit ainsi que la convexité directionnelle locale au point  $\mu_0$  de  $\mathcal{KV}(X)$  est assurée dans les directions tangentes à l'orbite  $(\mathcal{G}(X))(\mu_0)$

(c). Le problème de convexité directionnelle locale au point  $\mu_0 \in \mathcal{KV}(X)$  est l'analogie Zariski du problème de Cauchy des équations différentielles ordinaires.

Formellement les expressions calculatoires des problèmes sont identiques. Il s'agit du problème d'existence sous conditions initiales prescrites des chemins

$$t \in [0, 1] \rightarrow \mu(t) \in \mathcal{KV}(X)$$

solution d'une équation différentielle, étant entendu qu'une condition initiale est un vecteur tangent  $(x_0, v_0)$ .

Ce qui distingue les deux problèmes sont les topologies de leur variété ambiante respective.

Je vais écrire les choses de façon détaillée.

(a) : Dans une variété différentiable  $X$  voici la formulation calculatoire du problème général de Cauchy au point  $(x_0, v_0) \in T_{x_0} X$ .

$$\begin{aligned} \frac{d\mu(t)}{dt} &= F(\mu(t), t), \\ (\mu(t), \frac{d\mu(t)}{dt})(t=0) &= (\mu_0, \nu_0). \end{aligned}$$

(b) : Dans la variété algébrique  $\mathcal{KV}(X)$  voici la formulation calculatoire du problème général de convexité locale au point  $(\mu_0, \nu_0) \in T_{\mu_0} \mathcal{KV}(X)$

$$\begin{aligned} d\mu(t) &= KV(\mu(t) - \mu_0), \\ (\mu(t), \frac{d\mu(t)}{dt})(t=0) &= (\mu_0, \nu_0) \end{aligned}$$

Dans le membre de gauche de l'avant dernière égalité ci-dessus,  $d$  est l'opérateur cobord du complexe  $C_{KV}(A, A)$ .

Ainsi le problème de convexité directionnelle locale est la problème de Cauchy cohomologique.

Sans perdre de vue que nous cherchons un chemin rectiligne d'origine  $\mu_0$  et d'extrémité  $\mu(1) = \mu$  nous posons

$$\mu(t) = \mu(0) + \nu(t).$$

Le problème de Cauchy cohomologique est la résolution de

$$d\nu(t) - KV(\nu(t)) = 0,$$

$$\nu(0) = 0,$$

$$\dot{\nu}(0) = \mu - A.$$

Ce qu'il faut rappeler est que dans la topologie de Zariski le chemin  $\mu(t)$  est une application rationnelle

$$t \rightarrow \mu(0) + t(\mu - \mu(0)) + \dots + t_\ell \nu_\ell$$

L'équation

$$d\nu(t) - KV(\nu(t)) = 0$$

prend la forme

$$td(\mu - A) - t^2 KV(\mu - A) + o(t^2) = 0.$$

Le théorème de convexité directionnelle est l'énoncé qui suit.

**Théorème 13.1** *Si l'équation*

$$td(\mu - A) - t^2 KV(\mu - A) = 0$$

*admet une solution  $\tau \in ]0, 1[$  alors  $\mathcal{KV}(X)$  est convexe au pont  $A$  dans la direction  $\vec{A}\mu$ . En outre la variété  $\mathcal{KV}(X)$  contient toute la droite*

$$\Delta = \mu_0 + \mathbb{R}\vec{\mu_0\mu}.$$

**Preuve.**

Les points  $\mu_0$  et  $\mu$  appartiennent à  $\mathcal{KV}(X)$ . Puisque le point  $\mu(\tau)$  est un point intérieur dans  $\vec{A}\mu$  il existe donc un nombre réel  $\epsilon$ ,  $0 < \epsilon < 1$ , tel que

$$\mu(\tau) = \epsilon(\mu - A).$$

L'élément  $\mu - A \in C_{KV}^2(A, A)$  satisfait les deux conditions suivantes

$$d(\mu - A) - KV(\mu - A) = 0,$$

$$\epsilon d(\mu - A) - \epsilon^2 KV(\mu - A) = 0.$$

Il en résulte que  $\mu - A$  satisfait les conditions

$$d(\mu - A) = 0,$$

$$KV(\mu - A) = 0.$$

La conclusion finale est l'inclusion

$$\vec{A}\mu \subset \mathcal{KV}(X).$$

La dernière assertion du théorème est évidente. Le théorème est démontré.

**Corollaire 13.2** *Soit  $\mu \in \mathcal{M}(X)$  tel que  $\mu - A \notin \mathcal{KV}(X)$ . Si  $\mathcal{KV}(X)$  est convexe dans la direction  $\vec{A}\mu$  alors  $A$  admet des déformations non triviales.*

Sans entrer dans des détails (qui sont disponibles sur demande éventuelle) je signale que le dernier théorème et son corollaire sont un carrefour des voies qui mènent au problème de convexité de  $\mathcal{KV}(X)$  au point  $A$ , au problème de Cauchy cohomologie et à l'espace de cohomologie  $H^3(A, A)$ .

Pour mémoire je rappelle que l'espace tangent de Zariski  $T_{\mu_0}\mathcal{KV}(X)$  est l'espace  $Z^2(A)$  des 2-cocycles du complexe  $C_{KV}(A, A)$  et que le sous-espace  $B^2(A, A)$  des 2-cobords du même complexe est l'espace tangent au point  $\mu_0$  à l'orbite  $\mathcal{G}(X)(\mu_0)$ .

J'ai juste planté le décor pour diverses géométries dans les variétés statistiques où des questions curxiales sont liées aux connexions linéaires.

### 13.1.2 Module des connexions localement plates.

(1). Plaçons nous sur le terrain abstrait (de la topologie discrète). Si on s'en tient à la  $(\mathcal{G}(X))$ -géométrie dans  $\mathcal{KV}(X)$ . Ce dernier est feuilleté par les classes d'isomorphisme des structures localement plates dans  $X$ , c'est à dire par les orbites  $(\mathcal{G}(X))(\mu) \subset \mathcal{KV}(X)$ .

Au début j'ai évoqué les **développements limités à l'ordre 1** qui sont des **approximations linéaires des objets développés**. Grosso modo il s'agit des espaces vectoriels tangents à ces objets.

Intuitivement le fibré normal à un feuilletage  $\mathcal{F}$  dans une variété  $X$  (fût-il singulier) est l'approximation linéaire de l'espace des feuilles  $\mathcal{F}\backslash X$ .

A isomorphisme linéaire près l'espace de cohomologie

$$H_{KV}(\mu) = \bigoplus_k H^k(\mu)$$

est un invariant algébrique de l'orbite  $(\mathcal{G}(X))(\mu)$ .

Sous cette perspective on a le résultat suivant

**Théorème 13.3** *L'approximation linéaire de l'espace de module*

$$\frac{\mathcal{KV}(X)}{\mathcal{G}(X)}$$

est l'application qui associe à tout point  $\tilde{A} \in \mathcal{G}(X) \setminus \mathcal{KV}(X)$  l'espace de cohomologie  $H^2(A, A)$ .

(2). Pour  $\mu_0, \mu \in \mathcal{KV}(X)$  posons

$$\Delta(\mu) = \mu_0 + \mathbb{R}\mu_0\vec{\mu}$$

et désignons par  $ind(\mu_0\mu)$  le cardinal de l'intersection

$$\Delta(\mu) \cap \mathcal{KV}(X).$$

Posons

$$ind([\mu_0]) = \max_{\mu \in \mathcal{KV}(X)} ind([\mu_0\mu]).$$

Le théorème de convexité directionnelle locale dit  $ind(\mu_0) \in \{2, \infty\}$

L'espace vectoriel  $H^2(A, A)$  étant l'approximation linéaire au point  $A$  du module

$$\frac{\mathcal{KV}(X)}{\mathcal{G}(X)}$$

si  $H_{KV}^2(A) = 0$  alors  $(\mathcal{G}(X))(A)$  est un ouvert de Zariski. Dans ce cas le point  $A \in \mathcal{KV}(X)$  est un point rigide dans le sens que toute structure assez proche de  $A$  lui est isomorphe.

J-L. Koszul a démontré que ce phénomène rigidité ne se produit pas au voisinage en certains points hyperboliques de  $\mathcal{KV}(X)$ . Ces points hyperboliques sont des ceux qui portent des structures de modèle statistique dans la variété ambiante  $X$ .

En terme de convexité directionnelle locale le théorème de non rigidité Koszul [?, ?] s'énonce comme il suit

**Théorème 13.4** *Si le revêtement universel  $(\tilde{X}, \tilde{\mu})$  de  $\mu \in KV(X)$  est difféomorphe à un cône convexe saillant alors  $ind([\mu]) = +\infty$ .*

## 13.2 QUELQUES LECTURES DE KV COMPLEXE SCALAIRE $C_{KV}(A, \mathcal{F}(X))$ .

Je continue avec les KV complexe scalaires qui hébergent les données de la Géométrie de l'Information. **Les métriques de Fisher sont des**

## espérances mathématiques des cocycles scalaires.

Dans cette sous-section le point  $A \in \mathcal{KV}(X)$  est fixé. Pour abrégé on va poser

$$C(A, \mathbb{R}) = C_{KV}(A, \mathcal{F}(X)).$$

Cette sous-section concerne le complexe

$$\rightarrow C^{k-1}(A, \mathbb{R}) \rightarrow C^k(A, \mathbb{R}) \rightarrow C^{k+1}(A, \mathbb{R}) \rightarrow$$

On rappelle que  $C^0(A, \mathbb{R})$  est l'espace vectoriel  $J(\mathcal{F}(X))$  qui est formé des éléments  $f \in \mathcal{F}(X)$  tels que  $\forall a, a' \in A$  on a

$$a(a'(f)) = (aa')(f).$$

Soit  $(X, \nabla)$  la structure variété localement plate définie par  $A$  (donc par  $\mu_0$ ). Les  $f \in J(\mathcal{F}(X))$  ont la dérivée covariante seconde est nulle. Ce sont des fonctions localement affines.

Nous n'allons pas nous intéresser à toute la cohomologie du complexe  $C(A, R)$  mais à celle de certains de ses sous-complexes.

Notons  $C_\tau(A, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel gradué par les  $C_\tau^k(A, \mathbb{R})$  dont les éléments sont des  $k$ -cochaines tensorielles. Autrement dit  $\theta \in C_\tau^k(A, R)$  si et seulement si

$$\theta : A^k \rightarrow \mathcal{F}(X)$$

est  $\mathcal{F}(X)$ - multilinéaire. Les éléments de  $C_\tau^k$  sont des sections du fibré vectoriel

$$(T^*X)^k \otimes \tilde{\mathbb{R}}$$

où  $\tilde{\mathbb{R}}$  est le fibré vectoriel trivial

$$X \times \mathbb{R} \rightarrow X.$$

De la définition de l'application cobord

$$C^k(A, R) \rightarrow^d C^{k+1}(A, R)$$

on voit facilement que

$$d(C_\tau^k(A, R)) \subset C_\tau^{k+1}(A, R).$$

Ce complexe  $C_\tau(A, R)$  heberge des ingrédients de la Géométrie de l'Information.

Considérons le début de ce complexe

$$0 \rightarrow J(\mathcal{F}(X)) \rightarrow C_\tau^1 \rightarrow C_\tau^2(A, \mathbb{R}) \rightarrow C_\tau^3(A, \mathbb{R}) \rightarrow$$

On a visiblement

$$H^0(A, \mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

**Définition 13.1** Une forme différentielle  $\theta$  définie dans une variété  $X$  est dite localement constante si tout point de  $X$  possède un voisinage  $U$  muni des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_m)$  dans lesquelles  $\theta$  s'écrit

$$\theta = \sum \theta_I dx^I$$

avec les coefficients  $\theta_I$  constants.

Il est facile de vérifier que chaque sous-espace homogène  $C_\tau^k(A, \mathbb{R})$  est un  $A$ -module. Il lui correspond un KV complexe

$$\rightarrow C_{KV}^{\ell-1}(A, C_\tau^k(A, \mathbb{R})) \rightarrow C_{KV}^\ell(A, C_\tau^k(A, \mathbb{R})) \rightarrow C_{KV}^{\ell+1}(A, C_\tau^k(A, \mathbb{R})) \rightarrow$$

Un calcul direct conduit à l'égalité suivante

$$Z_\tau^1(A, \mathbb{R}) = Z_{KV}^0(A, C_\tau^1(A, \mathbb{R})) = H^0(A, C_\tau^1(A, \mathbb{R})).$$

Les éléments de  $B_\tau^1(A, \mathbb{R})$  sont des 1-formes localement constantes. Ce sont les éléments de  $d(J(\mathcal{F}(X)))$ .

Nous avons

$$H^1(A, \mathbb{R}) = \frac{H^0(A, C_\tau^1(A, \mathbb{R}))}{d(J(\mathcal{F}(X)))}.$$

Du sous-complexe tensoriel examinons maintenant les morceaux suivants

$$\rightarrow C_\tau^1(A, \mathbb{R}) \rightarrow C_\tau^2(A, \mathbb{R}) \rightarrow C_\tau^3(A, \mathbb{R}) \rightarrow$$

Nous voulons utiliser ce morceau pour jeter une piste vers un de Chevalley-Eilenberg.

### UN AUXILIARE EFFICACE.

La nullité de la KV anomalie  $KV(\mu_0) = 0$  vaut autorisation de regarder  $A$  comme module à gauche sur l'algèbre de Lie  $A(X)$  des commutateurs de  $A$ . L'espace vectoriel  $C_{KV}^1(A, \mathbb{R})$  hérite d'une structure de  $A(X)$ -module à gauche. Le complexe de Chevalley-Eilenberg qui en naît est noté  $C(A(X), C_{KV}^1(A, \mathbb{R}))$ . L'opérateur cobord

$$\delta : C^k(A(X), C_{KV}^1(A, \mathbb{R})) \rightarrow C^{k+1}(A(X), C_{KV}^1(A, \mathbb{R}))$$

est défini par la formule

$$\begin{aligned} (\delta f)(a_0, \dots, a_k) &= \sum (-1)^j a_j (f(a_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_k)) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f([a_i, a_j], \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_k). \end{aligned}$$

Pour  $1 \leq k$  et tout  $a \in A$  on a l'inclusion

$$C^k(A(X), C_{KV}^1(A, \mathbb{R})) \subset C_{KV}^2(A, \mathbb{R})$$

et l'égalité

$$((\delta f)(a_0, \dots, a_k))(a) = -(df)(a_0, \dots, a_k, a)$$

quelque soit  $f \in C^k(A(X), C^k(A, R))$ .

Il en résulte que pour  $1 \leq k$  on a

$$H^k(A(X), C^1(A, R)) \subset H^{k+1}(A, R).$$

Le membre de gauche de l'égalité ci-dessus apparaît dans les travaux pionniers de Nijenhuis et y est appelé cohomologie de la KV algèbre  $A$  à coefficients dans  $\mathcal{F}(X)$  [19].

Il est facile de vérifier que pour  $k = 1$  on a l'égalité

$$H^1(A(X), C^1(A, \mathbb{R})) = H_{KV}^2(A, \mathbb{R})$$

On verra plus loin que cette égalité joue un rôle intéressant en Géométrie de l'Information.

C'est l'**égalité pont** entre la géométrie hessienne et les métriques de Fisher des modèles statistiques.

### 13.3 LE COMPLEXE $C(A \oplus \mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$

Considérons la KV algèbre

$$\mathcal{B} = A \oplus \mathcal{F}(X).$$

Je rappelle que sa multiplication est définie par la formule suivante

$$(a, f)(a', f') = (aa', a(f') + ff').$$

Nous allons examiner rapidement le complexe scalaire de cette KV algèbre

$$C(\mathcal{B}, \mathbb{R}) = C_{KV}(\mathcal{B}, \mathcal{F}(X)).$$

Nous adoptons la notation suivante

$$C^k(\mathcal{B}, \mathbb{R}) = \bigoplus_{i+j=k} C^{i,j}(\mathcal{B}, \mathbb{R})$$

avec

$$C^{i,j}(\mathcal{B}, \mathbb{R}) = \text{Hom}(\otimes^i A \otimes \otimes^j \mathcal{F}(X), \mathbb{R}).$$

L'opérateur cobord

$$C^k(\mathcal{B}, \mathbb{R}) \rightarrow^d C^{k+1}(\mathcal{B}, \mathbb{R})$$

ne préserve pas cette bigraduation de  $C(\mathcal{B}, R)$ . Cette situation conduit à plusieurs sources intéressantes. A titre d'illustration nous considérons la suite exacte d'espaces vectoriels suivante

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\iota} \mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}(X) \rightarrow 0.$$

Du point de vue de l'algèbre homologique cette suite exacte est fondamentale à plus d'un titre. On peut l'étudier sous plusieurs perspectives dont chacune est sources de renseignements en particulier. En voici quelques unes.

(1). C'est une suite exacte de modules à gauche sur l'anneau **associatif commutatif**  $\mathcal{F}(X)$ . On en tire un triangle exact

$$\begin{array}{ccc} & HH(\mathcal{F}(X), \mathcal{B}) & \\ & \nearrow & \searrow \\ HH(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X)) & \longleftarrow & HH(\mathcal{F}(X), A) \end{array}$$

dont les sommets sont les espaces de cohomologie de Hochschild

$$HH(\mathcal{F}(X), A), \quad HH(\mathcal{F}(X), \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad HH(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(X))$$

Puisqu'une algèbre associative est une KV algèbre on en tire également un triangle exact dont les sommets sont des espaces de KV cohomologie de  $\mathcal{F}(X)$ .

Cette suite exacte longue permet la construction d'un pont entre la Quantification par Déformation des variétés de Poisson, les Algébroides de Courant et les structures de Dirac.

(2). On peut regarder la suite exacte

$$0 \rightarrow A \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow 0$$

comme une suite de KV-bimodule sur la KV algèbre  $A$ . On en déduit la suite longue de KV cohomologie

$$\rightarrow H^{k-1}(A, A) \rightarrow H^k(A, \mathcal{B}) \rightarrow H^k(A, \mathcal{F}(X)) \rightarrow H^{k+1}(A, A) \rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} & H(A, \mathcal{B}) & \\ & \swarrow & \searrow \\ H(A, \mathcal{F}(X)) & \longrightarrow & H(A, A) \end{array}$$

Il est opportun de rappeler que  $H(A, \mathcal{F}(X))$  a été labelisé cohomologie scalaire de  $A$  et est notée  $H(A, \mathbb{R})$ .

Maintenant regardons  $H(A, \mathbb{R})$  comme la cohomologie scalaire de la structure de variété localement plate définie par  $A$  dans la variété  $X$ . Alors du morceau exact

$$H^2(A, \mathcal{B}) \xrightarrow{\tilde{\pi}} H^2(A, \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta} H^3(A, A)$$

on tire que  $\delta$  est un pont entre le lieu d'habitation des métriques riemanniennes localement hessiennes et le lieu d'habitation des obstructions à la résolution du problème de Cauchy cohomologique

$$d\nu(t) - KV(\nu(t)) = 0,$$

$$\nu(o) = \nu_0.$$

(3). On peut de nouveau regarder le couple  $(X, A)$  comme un champ de jauge uniforme ( mouvement uniforme car champ de force nul) dans le fibré  $\mathcal{R}^1(X)$  des repères linéaires d'ordre 1.

L'espace  $C^2_\tau(A, A)$  des 2-cochaines tensoriels est en correspondance bijective avec l'espace des champs de jauge dans  $\mathcal{R}^1(X)$ . Le problème des déformations du champ de jauge  $(X, A)$  en champs de jauge uniformes est géré par les deux espaces de cohomologie  $H^2(A, A)$  et  $H^3(A, A)$  via le problème de Cauchy cohomologique. En fait  $\forall \theta \in C^2_\tau(A, A)$

$$(a, a') \rightarrow aa' + \theta(a, a')$$

est une connexion linéaire  $\nabla$  dont le tenseur de courbure  $R_\nabla$  est l'évaluation au point  $\theta$  du polynôme de Maurer-Cartan, c'est à dire

$$R_\nabla(a, a')(a'') = KV(\theta)(a, a', a'') - d\theta(a, a', a'').$$

Cette formule permet une lecture homologique des tenseurs de courbure des  $\alpha$ -connexions de Amari dans un modèle statistique.

(4). Le dernier regard que je propose est de lire la suite exacte

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\iota} \mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}(X) \rightarrow 0$$

comme une suite des KV modules sur  $\mathcal{B}$ . On en déduit encore la suite exacte longue

$$\xrightarrow{\delta} H^k(\mathcal{B}, A) \xrightarrow{\tilde{\iota}} H^k(\mathcal{B}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\tilde{\pi}} H^k(\mathcal{B}, \mathcal{F}(X)) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(\mathcal{B}, A) \rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} & H(\mathcal{B}, \mathcal{B}) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ H(\mathcal{B}, \mathcal{F}(X)) & \xrightarrow{\quad} & H(\mathcal{B}, A) \end{array}$$

La bi-graduation  $C^{i,j}(\mathcal{B}, ?)$  n'étant pas préservée par l'opérateur cobord une exploration poussée qui tiendrait compte de cette bi-graduation nécessite de recourir aux suites spectrales. Je ne m'y attarde pas. Cependant voici un théorème de nullité qui vient de cette exploration.

**Théorème 13.5** [23] *On considère le KV complexe  $C(\mathcal{B}, \mathcal{F}(X))$  équipé de la bi-graduation*

$$C^k(\mathcal{B}, \mathcal{F}(X)) = \bigoplus_{i+j=k} C^{i,j}(\mathcal{B}, \mathcal{F}(X))$$

*Pour tout nombre entier positif  $k$  on a*

$$H^{k,0}(\mathcal{B}, \mathcal{F}(X)) = 0.$$

Cet énoncé présente deux aspects intéressants.

(a). D'une part il ne signifie nullement pas que le KV complexe scalaire

$$C(A, R) = C_{KV}(A, \mathcal{F}(X))$$

est acyclique. Autrement dit, il ne signifie pas que les espaces de cohomologie

$$H^k(A, \mathcal{F}(X))$$

sont tous nuls en degré positif.

(b). D'autre part on peut se placer dans la paire ( de KV algèbres )  $(A \subset B)$  et y considérer les applications restriction

$$C^k(\mathcal{B}, \mathcal{F}(X)) \rightarrow C^k(A, \mathcal{F}(X)).$$

En dérivent les applications Inflation dans le sens de suites spectrales de Hochschild-Serre [10], [11], [7]

$$H^k(\mathcal{B}, \mathcal{F}(X)) \rightarrow H^k(A, \mathcal{F}(X)).$$

Le théorème dit alors que l'application Inflation est nulle en degrés positifs. On sait que des nombreuses suites exactes de Hochschild-Serre aboutissent dans des espaces de cohomologie de dimension 2. Or les espaces des 2-cochaines des KV complexes contient des nombreux objets de la Géométrie de l'information et des variétés statistiques tels que métriques riemanniennes, connexions linéaires, seconde forme fondamentale. Ces remarques sont à la base de l'intérêt pour le complexe  $C(\mathcal{B}, \mathcal{F}(X))$ .

Grosso modo l'espace de KV cohomologie  $H^2(\mathcal{B}, \mathcal{F}(X))$  se décompose comme il suit

$$H^2(\mathcal{B}, \mathcal{F}(X)) = H^{1,1}(\mathcal{B}, \mathcal{F}(X)) \oplus H^{0,2}(\mathcal{B}, \mathcal{F}(X)).$$

On peut observer qu'aucune classe dans  $H^{0,2}(B, \mathcal{F}(X))$  ne contient un tenseur de Poisson non nul.

Je signale que mérite également l'attention la suite exacte encore

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow A \rightarrow 0.$$

## 14 CONVEXITE DE KOSZUL ET KV COHOMOLOGIE.

La notion de convexité de variété localement plates est introduite par Jean-Louis Koszul [24], [25]. Les considérations qui y ont conduit trouvent leur source dans la géométrie des domaines homogènes bornés [26], [27], [21]. La notion de convexité introduite par Koszul est l'analogie réel de la convexité holomorphe de Kaup [29] [25].

Soit  $(X, \nabla)$  une variété localement plate. Soit  $(\tilde{X}, \tilde{\nabla})$  le revêtement universel de  $(X, \nabla)$ . Rappelons qu'à homéomorphisme près l'espace topologique  $\tilde{X}$  est l'espace  $\Pi[(0, [0, 1]), (x_0, X)]$  des classes d'homotopie à extrémités fixes des chemins d'origine fixe  $x_0 \in X$ .

Soit  $c(t) \subset X$  un chemin différentiable d'origine  $x_0$  et

$$\tau(s) : T_{x_0}X \rightarrow T_{c(s)}X$$

le transport parallèle lelong du chemin  $c(t)$ .

**Définition 14.1** *Le déroulement des classes d'homotopie des chemins d'origine  $x_0$  est l'application*

$$D : \tilde{X} \rightarrow T_{x_0}X$$

définie par

$$D([c]) = \int_0^1 \tau^{-1}(s) \left( \frac{dc(s)}{ds} \right) ds.$$

### REMARQUE

Il existe une représentation affine de  $\pi_1(X)$  dans  $T_{x_0}X$  appelée représentation d'holonomie telle que le déroulement est une application affine  $\pi_1(X)$ -équivariante.

**Définition 14.2** (1) *La structure localement  $(X, \nabla)$  est dite complète si le déroulement est un difféomorphisme de  $(\tilde{X}, \tilde{\nabla})$  sur  $(T_{x_0}X, D_0)$  où  $D_0$  est la connexion euclidienne canonique.*

(2) *La structure localement plate  $(X, \nabla)$  est dite hyperbolique si l'image  $D(\tilde{X})$  est un ouvert convexe de  $T_{x_0}X$  ne contenant aucune droite entière.*

Considérons le problème de Cauchy au point  $x$  pour l'équation des chemins géodésiques

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{dc(t)}{dt}} \frac{dc(t)}{dt} &= 0, \\ c(0) &= x. \end{aligned}$$

La complétude de  $(X, \nabla)$  signifie que pour tout  $x \in X$  la solution maximale du problème de Cauchy au point  $x$  est définie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

L'hyperbolicité de  $(X, \nabla)$  signifie qu'aucun problème de Cauchy n'admet de solution maximale définie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

## EXEMPLES

(1). Soit  $X = \mathbb{R}^2 = ((x_1, x_2))$  muni de la connexion définie par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$$

Il est facile de voir que les chemins géodésiques sont des droites entières.

(2). Considérons encore  $\mathbb{R}^2$  muni de la connexion définie par

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \delta_{i,1} \delta_{j,2} \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$\delta_{i,j}$  est le symbole de Kronecker. Cette structure  $(\mathbb{R}^2, \nabla)$  est hyperbolique.

Soit  $(X, \nabla)$  une structure localement plate. Nous notons  $A$  la KV algèbre  $(\mathcal{X}(X), \nabla)$ . Nous savons que l'espace de KV cohomologie  $H^2(A, A)$  mesure l'étendue de la structure transverse à l'orbite  $\mathcal{G}(X)(A) \subset \mathcal{KV}(X)$ .

Supposons que  $(X, \nabla)$  soit hyperbolique. D'après [18]  $(X, \nabla)$  possède des déformations non triviales. Cela entraîne que l'espace de cohomologie  $H^2(A, A)$  n'est pas nul. Cet énoncé a des liens avec la Géométrie de l'information. Nous considérons le sous-complexe

$$\xrightarrow{d} C_\tau^{k-1}(A, R) \xrightarrow{d} C_\tau^k(A, R) \xrightarrow{d} C_\tau^{k+1}(A, R) \xrightarrow{d}$$

dont les cochaines sont des applications  $\mathcal{F}$ -multilinéaires de  $\mathcal{X}(X)$  à valeurs dans  $\mathcal{F}(X)$ .

Les formes quadratiques (donc les (pseudo) métriques riemanniennes dans  $X$ ), sont des 2-cochaines scalaires du complexe  $C_\tau(A, \mathbb{R})$ .

Nous allons reformuler la définition de structure de variété localement hyperbolique à l'aide du complexe  $C_\tau(A, \mathbb{R})$ .

Soit  $(X, \nabla)$  une structure de variété localement plate. Notons  $A_\nabla = (\mathcal{X}(X), \nabla)$  la KV algèbre dont la multiplication est donnée par

$$aa' = \nabla_a a'$$

et par  $C_\tau(X, \mathbb{R})$  le KV complexe tensoriel de  $(X, \nabla)$ .

**Définition 14.3** Une structure de variété localement hessienne est un triplet  $(X, \nabla, g)$  formé d'une structure de variété localement plate  $(X, \nabla)$  et d'un 2-cocycle symétrique défini positif  $g \in C_\tau^2(A_\nabla, R)$ .

**Définition 14.4** Dans une structure localement hessienne  $(X, \nabla, g)$ , la classe de cohomologie  $[g] \in H_\tau^2(A_\nabla, \mathbb{R})$  est appelée classe hessienne.

**Théorème 14.1** *La classe de cohomologie  $[g] \in H_{\nabla, \tau}^2(A_{\nabla}, R)$  d'une variété localement hessienne  $(X, \nabla, g)$  est localement triviale.*

### Démonstration

Il s'agit de prouver que tout point  $x \in X$  possède un voisinage ouvert  $U$  tel qu'en restriction sur  $U$  la classe de cohomologie  $[g_U] \in H_{\nabla, \tau}^2(A_{\nabla}, F(U))$  est nulle.

Nous savons associer au couple  $(A_{\nabla}, C(A_{\nabla}, R))$  le complexe de Chevelley-Eilenberg

$$C_{CE}^{k-1}(A_{\nabla}, C_{KV}^1(A_{\nabla}, R)) \xrightarrow{d_{\nabla}} C_{CE}^k(A_{\nabla}, C_{KV}^1(A_{\nabla}, R)) \xrightarrow{d_{\nabla}} C_{CE}^{k+1}(A_{\nabla}, C_{KV}^1(A_{\nabla}, R))$$

avec

$$C_{CE}^k(A_{\nabla}, C_{KV}^1(A_{\nabla}, R)) = \text{Hom}(\wedge^k A_{\nabla}, C_{KV}^1(A_{\nabla}, R)).$$

L'opérateur cobord

$$d_{\nabla} : C_{CE}^k(A_{\nabla}, C_{KV}^1(A_{\nabla}, R)) \xrightarrow{d} C_{KV}^{k+1}(A_{\nabla}, C_{KV}^1(A_{\nabla}, R))$$

est définie par

$$\begin{aligned} d_{\nabla} f(a_0, \dots, a_k) &= \sum (-1)^i \nabla_{a_i} (f(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_k)) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f([a_i, a_j], \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_k). \end{aligned}$$

Parceque  $F(X)$  est un  $A_{\nabla}$ -module à gauche on a

$$H_{CE}^k(A_{\nabla}, C_{KV}^1(A_{\nabla}, R)) = H_{KV}^{k+1}(A_{\nabla}, R).$$

En particulier on a

$$H_{CE}^1(A_{\nabla}, C_{KV}^1(A_{\nabla}, R)) = H_{KV}^2(A_{\nabla}, R).$$

Ainsi le cocycle  $g$  est déterminé par le produit intérieur

$$\iota : a \in A_{\nabla} \rightarrow \tilde{g}(a) = \iota(a)g \in C_{KV}^1(A_{\nabla}, R).$$

Puisque  $g$  est tensoriel  $\tilde{g}$  est une section du fibré cotangent  $T^*X$ . Le couple  $(T^*X, \nabla)$  est un fibré vectoriel plat.

Soit  $U$  un ouvert simplement connexe domaine des coordonnées affines  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  et domaine de trivialisatation du fibré  $T^*X$ .

Ainsi toute section au dessus de l'ouvert  $U$  est le graphe d'une application de  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$ , c'est à dire une 1-forme différentielle définie dans  $U$ . La cochaîne  $\tilde{g}$  est une 1-forme

$$\tilde{g}(x) = \sum_{i,j} [\tilde{g}_{ij}(x_1, \dots, x_n) dx_i] dx_j$$

Parceque  $d_{\nabla}(\tilde{g}) = 0$  chacune des 1-formes scalaires

$$\theta_j = \sum_i \tilde{g}_{i,j} dx_i$$

est de Rham fermée. En vertu du Lemme de Poincaré les formes  $\theta_j$  sont exactes. En d'autre termes il existe une section de  $T^*U$   $\beta \in C^1_{KV}(A_{\nabla}, R)$  tel que

$$\tilde{g}(a) = (d_{\nabla}\beta)(a) = \nabla_a\beta.$$

Cela montre que

$$[g_U] = 0 \in H^1_{CE}(A_{\nabla}, C^1_{KV}(A_{\nabla}, R)).$$

Le théorème est démontré.

## ADDEBDUM

Le terme  $\nabla_a\beta$  signifie que pour tout  $a' \in A_{\nabla}$  on a

$$(\nabla_a\beta)(a') = a(\beta(a')) - \beta(\nabla_a a') = g(a, a').$$

Puisque  $g(a, a') = g(a', a)$  la 1-forme différentielle  $\beta$  est fermée. La simple connexité de  $U$  assure l'existence d'une fonction différentiable locale  $f \in F(U)$  telle que

$$\beta = df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Que les fonctions coordonnées locales  $x_1, \dots, x_n$  soient affines signifie que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0.$$

En fin de compte nous avons

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

ce qui signifie qu'en restriction au dessus de l'ouvert  $U$  le tenseur métrique  $g$  est la hessienne d'une fonction différentiable.

**Définition 14.5** [5] *Une structure localement hessienne  $(X, \nabla, g)$  est une structure de Koszul si la classe de cohomologie  $[g] \in H^2_{KV}(A_{\nabla}, R)$  est nulle. Les primitives de  $g$  sont appelées premières formes de Koszul.*

La notion de première forme de Koszul a été introduite par Shima [5]. Voici l'énoncé cohomologique du théorème de convexité de Koszul.

**Théorème 14.2** *Pour que la structure localement  $(X, \nabla)$  sous-jacente à une structure localement hessienne  $(X, \nabla, g)$  soit hyperbolique il est nécessaire que la classe de cohomologie de  $g$  soit nulle. Si  $X$  est compacte la nullité de la classe de  $g$  entraîne l'hyperbolicité de  $(X, \nabla)$ .*

## EPROUVER SA DEXTERITE.

Dire en justifiant l'affirmation si la structure suivante est ou n'est pas une structure de Koszul.

(1). La structure riemannienne naturelle du tore héritée de la structure euclidienne de  $\mathbb{R}^2$  est

$$(T^2, \nabla, g) = \left( \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}, g_0, \nabla_0 \right).$$

(2). En cas (de supçon de) réponse affirmative dire si cette structure est ou n'est pas (globalement) hessienne.

(3). Dire en justifiant l'affirmation si le disque

$$\bar{B}^2 = \{x^2 + y^1 \leq 1\}$$

est ou n'est pas une sous-variété localement de la structure plate naturelle  $(\mathbb{R}^2, \nabla_0)$ .

### 14.1 PAIRES DES CONNEXIONS DUALES ET CONVEXITE DIRECTIONNELLE.

Soit  $(V, X, g)$  un fibré vectoriel euclidien de base  $X$ . C'est un triplet constitué comme il suit.

(a). On a un fibré vectoriel  $(V, p, X)$  de base  $X$ .

(b). Pour  $x \in X$   $g(x)$  est un produit scalaire dans la fibre  $V_x$ .

(c). L'application  $x \rightarrow g_x$  est différentiable.

(d). Chaque carte de trivialisatoin de  $(V, X)$  induit une isométrie de  $(V_x, g_x)$  sur l'espace euclidien  $(\mathbb{R}^\ell, g_0)$ .

**Proposition 14.3** *Il existe des connexions de Koszul  $\nabla$  dans  $(V, p, X)$  telles que*

$$\xi(g(s, s')) = g(\nabla_\xi s, s') + g(s, \nabla_\xi s').$$

Pour un non géomètre différentiel, que des connexions  $\nabla$  existent demande un début de preuve. Une façon de tenter de l'en convaincre.

On commence par l'examen du cas de la fibration triviale

$$\mathbb{R}^\ell \times X \xrightarrow{p} X.$$

On choisit une base des sections globales orthornormées

$$x \rightarrow x \{s_1(x), \dots, s_\ell(x)\}$$

Pour tout  $\xi \in \mathcal{X}(X)$  on définit la dérivation covariant  $\nabla_\xi$  en posant

$$\nabla_\xi s_j = 0.$$

Cette connexion satisfait les conditions requises.

Dans le cas d'un fibré vectoriel non trivial on choisit une partition de l'unité  $\{f_j, j \in J\}$  subordonnée à un atlas de trivialisations localement fini  $\{(U_j, \phi_j), j \in J\}$ . Au dessus de chaque ouvert  $U_j$  le fibré est isomorphe au fibré trivial

$$(U_j \times \mathbb{R}^\ell) \rightarrow U_j.$$

On y construit une connexion euclidienne  $\nabla_j$ . On globalise la construction des  $\nabla_j$  en posant

$$\nabla = \sum_{j \in J} f_j \nabla_j.$$

Cette connexion a la propriété requise

$$\nabla g = 0.$$

Il y a dans la littérature ad hoc d'autres preuves de l'existence des connexions métriques dans un fibré vectoriel réel.

Le cas des fibrés vectoriels holomorphes est peu sûr. Il y a des fibrés holomorphes ne possédant aucune connexion holomorphe. Exprimé en terme de connexion de Ehresmann, il y a des fibrés holomorphes pour les quels la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{J}^1(V) \xrightarrow{\iota} J^1(V) \xrightarrow{\pi} V \longrightarrow 0$$

ne possède pas de scission holomorphe,[1].

## PAIRE DUALE

**Définition 14.6** Une paire de connexions  $(\nabla, \nabla')$  définies dans le fibré vectoriel euclidien  $(V, X, g)$  est une paire duale si  $\forall \xi \in \mathcal{X}(X), s, s' \in \Gamma(V)$  on a

$$\xi g(s, s') = g(\nabla_\xi s, s') + g(s, \nabla'_\xi s').$$

Une paire duale jouit des propriétés suivantes.

(1). les tenseurs de courbure vérifient l'identité

$$g(R_\nabla(\xi, \zeta)(s), s') + g(s, R'_{\nabla}(\xi, \zeta)(s')) = 0$$

quelque soit  $\xi, \zeta \in \mathcal{X}(X), s \in \Gamma(V)$ ,

(2). La connexion

$$D = \frac{\nabla + \nabla'}{2}$$

est autoduale, c'est à dire

$$\xi g(s, s') = g(D_\xi s, s') + g(x, D_\xi s').$$

C'est donc une connexion euclidienne.

## CAS SYMPLECTIQUE

Juste pour dire la non dégénérescence seule autorise la définition de paire duale. Si  $(V, p, X, \omega)$  est un fibré vectoriel symplectique une paire de connexions duales par rapport à  $\omega$  jouissent des propriétés (1) et (2).

De la propriété (2) on déduit que l'existence de connexion riemannoienne ou symplectique se déduit de l'**existence de connexion** dans un fibré vectoriel.

### 14.1.1 DUALITE DES CONNEXIONS LINEAIRES.

Soit  $(\nabla, \nabla')$  une paire duale des connexions de Koszul dans une variété riemannienne  $(X, g)$ . Soient  $\xi, \xi'$  et  $\xi''$  des champs des vecteurs tangents à  $X$ . La dualité signifie que l'on a

$$(\nabla_{\xi}g)(\xi', \xi'') - (\nabla'_{\xi}g)(\xi, \xi'') + (\nabla'_{\xi}g)(\xi', \xi'') - (\nabla_{\xi'}g)(\xi, \xi'') = 0.$$

Si le couple  $(X, \nabla)$  est une structure localement plate alors pour tout tenseur métrique  $g \in C^2_{KV}(A_{\nabla}, \mathcal{F}(X))$  la relation de  $g$ -dualité entre la connexion localement plate  $\nabla$  et sa connexion duale  $\nabla'$  entraîne

$$dg(\xi, \xi', \xi'') = g(T_{\nabla'}(\xi, \xi'), \xi'').$$

C'est une formule de calcul des tenseurs de torsion des connexions duales d'une connexion localement plates. On sait que les tenseurs de courbures de ces connexions sont nulles.

Je reformule un résultat bien connu, [5]

**Proposition 14.4** *Soit  $(X, g, \nabla)$  un triplet où  $(X, \nabla)$  est une structure de variété localement plate et  $(g \in C^2_{\tau}(A_{\nabla}, \mathbb{R}))$  est un tenseur métrique riemannien. Soit  $\nabla'$  la connexion  $g$ -duale de  $\nabla$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Le tenseur de torsion  $T'_{\nabla}$  est nul.
2.  $dg = 0$ .

La dernière proposition et le théorème de convexité conduisent au

**Théorème 14.5** *Soit  $(X, g, \nabla)$  un triplet où  $(X, g)$  est une structure de variété riemannienne et  $(X, \nabla)$  est une structure de variété localement plate. Soit  $\nabla^g$  la connexion de Levi-Civita de  $(X, g)$  et Notons  $\Delta \subset \mathcal{M}(X)$  la droite qui passe par le points  $\nabla$  et  $\nabla^g$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. La connexion  $\nabla_g$  est plate.
2. Le cardinal de  $(\Delta \cap \mathcal{KV}(X))$  est supérieur à 2.
3.  $\mathcal{KV}(X)$  est convexe au point  $\nabla$  dans la direction  $\Delta$ .

## 14.2 TENSEUR DE COURBURE DES CLASSES HESSIENNES

La KV anomalie conduit à une formule simple des courbures de métriques localement hessiennes. En effet soit  $(X, \nabla, g)$  une structure localement hessienne. Soit  $\nabla'$  la structure localement plate duale de  $\nabla$  par rapport à  $g$ .

Le tenseur

$$S = \nabla' - \nabla$$

est un zéro du polynôme de Maurer-Cartan  $P_{MC}$  de  $\nabla$ .

On a donc

$$dS = KV(S).$$

La connexion de Levi-Civita de  $g$  est  $\nabla_g = \frac{\nabla + \nabla'}{2} = \nabla + \frac{S}{2}$ . Le tenseur de courbure de  $\nabla_g$  est donné par la formule suivante

$$R_{\nabla_g} = P_{MC}\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{3}{4}dS = \frac{3}{4}KV(S).$$

Puisque  $S$  est un tenseur symétrique sa KV anomalie est un associateur.

On a donc

$$R_{\nabla_g}(\xi, \xi')(\xi'') = \frac{3}{4}(S(S(\xi, \xi''), \xi') - S(\xi, S(\xi'', \xi'))).$$

On en déduit une formule calculatoire simple de la courbure de Ricci.

$$Ric(\xi, \xi') = \frac{3}{4}trace(S_\xi \circ S'_\xi - S_{S(\xi, \xi')})$$

où

$$S_\xi(\zeta) = S(\xi, \zeta).$$

## 15 CLASSES HESSIENNES ET METRIQUES DE FISHER.

Cette section est une introduction aux applications de la Géométrie des variétés localement hessienne à la Géométrie de l'Information.

Un ouvrage consacré à la géométrie différentielle des variétés (localement) hessiennes est la monographie [5]. La mise sous presse de cette référence est antérieure à [22]. Les structures hessiennes ont plus sources. Les plus visibles sont la géométrie des domaines homogènes bornés, les déformations de variétés localement plates.

Le théorème de convexité de Koszul dit ceci.

(1). Les variété localement plates hyperboliques sont des revêtements des variétés localement hessiennes dont les classes hessiennes sont nulles.

Le commentaire qui sied est une nouvelle interprétation des classes symétriques définies  $[g] \in H_{KV}^2(A_\mu, \mathbb{R})$  comme des obstructions l'hyperbolicité de  $\mu \in \mathcal{KV}(X)$ .

(2). La propriété pour  $\mu \in \mathcal{KV}(X)$  d'être hyperbolique n'a pas d'obstructions locales. Autrement dit toute variété localement hessienne est localement hyperbolique.

Dans une variété compacte  $X$  on peut reformuler le théorème de convexité de Koszul comme il suit.

**Théorème 15.1** *Soit  $X$  une variété compacte et  $\mu \in \mathcal{KV}(X)$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

1.  $\mu$  est pas hyperbolique.
2. La classe de cohomologie de tout cocycle **symétrique défini**  $g \in Z_\tau^2(A_\mu, \mathbb{R})$  est non nulle.

Nous allons chercher des ponts qui conduisent à la géométrie de l'information.

### 15.1 PARTITIONS DE L'UNITE.

Nous proposons une lecture un peu classique de ce qu'est un modèle statistique pour un ensemble mesurable  $\Xi$ .

Une fois pour toute je travaille avec des **structures d'ensemble mesuré**  $(\Xi, d_\xi)$  où  $d_\xi$  est la mesuré de Dirac ou de Borel dans l'ensemble mesurable  $\Xi$ .

**Définition 15.1** *Une partition de l'unité dans une variété  $X$  indexée par un ensemble mesuré  $(\Xi, d_\xi)$  est une application différentiable*

$$x \rightarrow^f f(x)$$

de  $X$  dans l'ensemble  $\mathcal{P}(\Xi)$  des densités de probabilité dans  $(\Xi, d\xi)$ . La différentiabilité signifie que pour tout  $\xi \in \Xi$  la fonction réelle

$$x \rightarrow f(x)(\xi)$$

est différentiable. Densité de probabilité veut dire que pour  $x \in X$  on a  $\int_{\Xi} f_{\xi}(x) d\xi = 1$ .

Dans la suite une partition de l'unité indexé par  $\Xi$  sera notée  $f_{\Xi}$  ou  $\{f_{\xi}, \xi \in \Xi\}$ .

En géométrie différentielle réelle les partitions de l'unité servent à construire des objets globaux linéarisables ( i.e. qui supportent l'addition et la multiplication par des fonctions ) à partir des modèles locaux. Cette opération se fait en les quatre étapes suivantes.

- (1). On fixe une partition de l'unité  $\{f_j, j \in J\}$  dont les domaines de définition forment un recouvrement
- (2). On construit des exemplaires locaux  $\{\mathbf{Ob}^j, j \in J\}$  d'un objet  $\mathbf{Ob}$ .
- (3). On procède à l'écrasement des modèles locaux

$$(f_j, \mathbf{Ob}^j) \rightarrow f_j \mathbf{Ob}^j.$$

- (4). La dernière étape consiste à intégrer les modèles locaux écrasés pour obtenir

$$\mathbf{Ob} = \int_J f_j \mathbf{Ob}^j.$$

On va voir que les métriques (riemanniennes) de Fisher des modèle statistiques pour un ensemble mesurable  $\Xi$  sont objets par ces quatre opérations.

**Définition 15.2** Une partition de l'unité  $\{f_{\xi}, \xi \in \Xi\}$  est dite **séparante** si pour tout couple des points distincts  $(x, x') \in (X \times X - \Delta(X))$  il existe un indice  $\xi \in \Xi$  tel que  $f_{\xi}(x) \neq f_{\xi}(x')$ .

Les structures de modèle statistique dans une variété différentiable  $X$  portent des partitions de l'unité particulières séparantes.

## 15.2 MODELES STATISTIQUES.

On commence par fixer un ensemble mesuré  $(\Xi, d\xi)$  et une variété  $X$ . Soit  $(X, \nabla, f_{\Xi})$  un triplet ainsi formé.

1.  $f_{\Xi} = \{f_{\xi}, \xi \in \Xi\}$  est une partition différentiable de l'unité séparante dans  $X$ .
2.  $(X, \nabla)$  est une structure de variété localement plate.

### Formes quadratiques

A  $f_{\Xi}$  on associe la famille

$$q_{\Xi} = \{q_{\xi}, \xi \in \Xi\}$$

des formes bilinéaires symétriques suivantes définies comme il suit. Pour  $\zeta, \zeta' \in \mathcal{X}(X)$  et  $x \in X$  on pose

$$q_{\xi}(x)(\zeta, \zeta') = \zeta_x(\log(f_{\xi}))\zeta'_x(\log(f_{\xi})).$$

Chaque forme bilinéaire  $q_{\xi}$  est sémi-définie positive. Par écrasement des  $q_{\xi}$  à l'aide de la partition de l'unité  $f_{\Xi}$  on obtient la nouvelle famille des formes bilinéaires sémi-définie positives

$$(\zeta_x, \zeta'_x) \rightarrow f_{\xi}(x)q_{\xi}(\zeta_x, \zeta'_x).$$

### UN CADRE QUI SIED.

Je propose une relecture de ce qui précède sous deux perspectives équivalentes. La première est la notion de **fibration localement triviale**, ici la notion de fibration topologique est suffisante pour dire des choses essentielles. La seconde perspective est la notion de **feuilletage  $\nu$ -mésuré simple sans holonomie**; c'est un peu plus compliqué à cause des mots ou expressions **feuilletage mesure, feuilletage sans holonomie**.

Pour cette seule raison sémantique je vais utilisé prioritairement la notion de **fibration localement triviale** déjà introduite.

On équipe (provisoirement) l'ensemble  $\Xi$  de la topologie engendrée par les parties mesurables. L'ensemble produit direct

$$\mathcal{X} = X \times \Xi$$

est muni de la topologie produit.

### FEUILLETAGE $\mathcal{F}_{\Xi}$ , FIBRATION LOCALEMENT TRIVIALE.

Il s'agit du feuilletage topologique de  $\mathcal{X}$  par les sous-espace topologiques

$$\mathcal{F}_{\Xi}(x) = \{x\} \times \Xi.$$

La variété  $X$  est l'espace des feuilles, i.e.

$$X = \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{F}_{\Xi}}.$$

### SONNETTE.

Dans une variété feuilletée  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  on a défini les notions d'**objet transverse au feuilletage  $\mathcal{F}$**  et celle d'**objet projetable**.

**Définition 15.3** Dans la variété feuilletée  $(X, \mathcal{F}_\Xi)$  l'application

$$(x, \xi) \rightarrow q_\xi(x)$$

est une métrique riemannienne sémi-définie transverse au feuilletage  $\mathcal{F}$ .

Dans la partie géométrie différentielle de ces notes a été introduite la notion de feuilletage  $\nu$ -mesurable.

Je vais munir chaque feuille  $\mathcal{F}_\Xi(x)$  de la mesure de densité  $f(x)$ . En d'autres mots on a les ensembles mesurés  $(\mathcal{F}_\Xi(x), f_\xi(x)d\xi)$ .

Le feuilletage de  $X$  ci-dessus est mesuré. On sait que l'intégration lelong des feuilles est une technique qui permet de transformer des objets transverses au feuilletage en objets projetables dans l'espace des feuilles. C'est l'idée que je vais exploiter.

Je pars de la métrique riemannienne semi-définie transverse à  $\mathcal{F}_\Xi$

$$(x, \xi) \rightarrow q_\xi(x) \in \mathcal{S}^2(T_{(x,\xi)}^*(X))$$

Par l'opération d'écrasement par la partition de l'unité  $f_\Xi$  on obtient la nouvelle métrique

$$(x, \xi) \rightarrow g_\xi(x) = f_\xi(x)q_\xi(x)$$

Cette métrique aussi est transverse au feuilletage  $\mathcal{F}_\Xi$ . Je vais l'intégrer lelong des feuilles pour obtenir une métrique projectable  $g$  définie par

$$g(\zeta_x, \zeta'_x) = \int_{\Xi} g_\xi(\zeta_x, \zeta'_x) d\xi.$$

**Définition 15.4** (1). Dans l'espace topologique feuilleté  $(X, \mathcal{F}_\Xi)$  la métrique (sémi-définie) transverse

$$(x, \xi) \rightarrow g_\xi(x)$$

est appelée métrique de Fisher de la structure  $(X, \Xi, f_\Xi)$ .

(2). Dans l'espace des feuilles  $X = \frac{X}{\mathcal{F}_\Xi}$  la métrique sémi-définie

$$(\zeta_x, \zeta'_x) \rightarrow g(\zeta_x, \zeta'_x)$$

est appelée métrique de Fisher de  $(X, \mathcal{F}_\Xi)$ .

### Commentaire

D'après les hypothèses la famille  $f_\Xi$  est séparante. L'application qui associe à tout  $x \in X$  la fonction

$$\xi \rightarrow f_\xi(x).$$

est injective. En outre chacune de ces fonction est une probabilité dans l'ensemble  $\Xi$ .

Ainsi le couple  $(X, f_\Xi)$  munit  $X$  de la structure de **variété des probabilités** dans  $(\Xi, d\xi)$ .

**NOTA BENE.**

Dans la variété feuilletée  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}_{\Xi})$  cohabitent l'opérateur d'intégration lelong des feuilles  $\int_{\Xi}$  de  $\mathcal{F}_{\Xi}$  et la dérivation de Lie transverse aux feuilles de  $\mathcal{F}_{\Xi}$ . Afin d'éviter des difficultés non profondes je vais ajouter l'hypothèse de commutation de ces deux opérateurs. Autrement dit, pour tout fonction  $h(x, \xi)$  qui est différentiable par rapport à  $x$  et intégrable lelong des feuilles de  $\mathcal{F}_{\Xi}$  et pour champ des vecteurs  $\zeta \in \mathcal{X}(X)$  on a

$$L_{\zeta}(\int_{\Xi} h(x, \xi) f_{\xi} d\xi) = \int_{\Xi} (L_{\zeta}(h(x, \xi) f_{\xi})) d\xi.$$

Suivant Amari-Nagaoka je vais tirer partie de l'intégrale suivante

$$\int_{\Xi} f_{\xi}(x) d\xi = 1.$$

Soient  $\zeta$  et  $\zeta'$  des champs des vecteurs tangents à  $X$ . En utilisant la formule de commutation ci-dessus on obtient la formule

$$\int_{\Xi} f_{\xi}(x) \zeta_x(\log(f_{\xi})) \zeta'_x(\log(f_{\xi})) d\xi + \int_{\Xi} f_{\xi}(x) \zeta_x(\zeta'(\log(f_{\xi}))) d\xi = 0.$$

Autrement dit on a

$$g(\zeta_x, \zeta'_x) = - \int_{\Xi} f_{\xi}(x) \zeta_x(\zeta'(\log(f_{\xi}))) d\xi.$$

**MODELES LOCAUX.**

**Variété statistique**

**J'invite à un concert donné par le duo formé des membres suivants.**

**Primo** le membre de droite de la dernière formule , c'est à dire

$$(\zeta, \zeta') \rightarrow \int_{\Xi} \zeta_x(\zeta(\log(f_{\xi}))) f_{\xi} d\xi.$$

**Secundo** l'identité

$$\int_{\Xi} f_{\xi}(x) \zeta_x(\log(f_{\xi})) d\xi = 0$$

quels que soient  $(x, \xi) \in \mathcal{X}, \zeta \in \mathcal{X}(X)$ .

La dernière identité est née du couple formé de deux hypothèses de départ. Je les rappelle.

**hypothèse 1.**  $\int_{\Xi} f_{\xi}(x) d\xi = 1 \forall x \in X$ .

**hypothèse 2.**  $L_{\zeta} \int_{\Xi} h(x, \xi) d\xi = \int_{\Xi} (L_{\zeta} h)(x, \xi) d\xi \forall (x, \zeta) \in X \times \mathcal{X}(X)$ .

**TC.** Examinons les expressions sous le signe  $\int_{\Xi}$  de l'égalité

$$\int_{\Xi} f_{\xi}(x) \zeta_x(\log(f_{\xi})) \zeta'_x(\log(f_{\xi})) d\xi = - \int_{\Xi} f_{\xi}(x) \zeta_x(\zeta'(\log(f_{\xi}))) d\xi.$$

On y fait face à l'obscurité suivante. Contrairement au membre de gauche celui de droite n'est pas symétrique par rapport au couple  $(\zeta, \zeta')$ . L'éclairage vient de **Secundo** qui permet d'écrire sans Etats d'Âme

$$\int_{\Xi} f_{\xi}(x) \zeta_x(\zeta'(\log(f_{\xi}))) d\xi = - \int_{\Xi} [f_{\xi}(x) \zeta_x(\zeta'(\log(f_{\xi}))) - f_{\xi}(x) \zeta''_x(\log(f_{\xi}))] d\xi$$

quel que soit  $\zeta' \in \mathcal{X}(X)$ .

Maintenant je soumetts l'analyse de la dernière égalité ci-dessus à la diligence d'une connexion linéaire  $\nabla$  dont le tenseur de torsion  $T_{\nabla}$  est nul et prend pour  $\zeta''$  le champ des vecteurs tangents  $\nabla_{\zeta} \zeta'$ . On a alors les identités qui suivent.

$$(\nabla_{\zeta} d(\log(f_{\xi}))) (\zeta') = \zeta(\zeta'(\log(f_{\xi}))) - (\nabla_{\zeta} \zeta')(f_{\xi}).$$

$$\int_{\Xi} f_{\xi}(x) \zeta_x(\log(f_{\xi})) \zeta'_x(\log(f_{\xi})) d\xi = - \int_{\Xi} f_{\xi}(x) (\nabla_{\zeta_x} d(\log(f_{\xi}))) (\zeta') d\xi.$$

Puisque  $d(\log(f_{\xi}))$  est un cocycle de de Rham et le tenseur de torsion de  $\nabla$  est nul le membre de droite de l'égalité ci-dessus est aussi symétrique par rapport au couple  $(\zeta, \zeta')$ .

La formule dit que le membre de droite est obtenue par écrasement de la dérivée covariante seconde transverse

$$\nabla(d(\log(f_{\xi})))$$

des fonctions  $\log(f_{\xi})$  suivi de l'intégration lelong des feuilles de  $\mathcal{F}_{\Xi}$ . Le couple (**hypothèse 1, hypothèse 2**) montre que le résultat final est indépendant du choix de la connexion sans torsion  $\nabla$ .

## ENTREE DE LA GEOMETRIE DE L'INFORMATION

Je vais supposer que le feuilletage  $\mathcal{F}_{\Xi} \subset \mathcal{X}$  est transversalement affine. Il revient au même de dire que l'espace  $\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{F}_{\Xi}}$  possède une structure de variété localement plate  $(X, \nabla)$ .

Sous cette hypothèse on obtient le caractère symétrique

- (1). La **dérivation covariante par  $\nabla$  des formes différentielles** n'est pas autre chose que l'**opérateur cobord du KV complexe de cochaines scalaire**  $C_{\tau}(A_{\nabla}, \mathbb{R})$ .
- (2). La métrique sémi-définie

$$q_{\xi} \nabla(\zeta, \zeta') = \zeta(\zeta' \log(f_{\xi})) - \nabla_{\zeta} \zeta'(\log(f_{\xi}))$$

est transversalement hessiennne.

(3) La métrique sémi-définie de Fisher projetable  $g$  est obtenue (dans  $\mathcal{X}$ ) par l'opération d'écrasement

$$(f_\xi, q_\xi(x)) \rightarrow f_\xi(x)q_\xi \nabla(x)$$

suivie de l'intégration lelong des feuilles

$$\int_{\Xi} f_\xi(x)q_\xi \nabla(x)d\xi.$$

Pourque la construction que je viens de faire avec une partion de l'unité  $f_\Xi$  soit un modèle statistique dans la sens de S. Amari il faut deux conditions.

La première veut que la partition  $f_\Xi$  soit séparante.

La seconde condition est que la  $g$  soit *définie*.

La construction que je viens de décrire met en vedette la KV cohomologie via la feuilletée transversalement *structure hessienne*

$$(\mathcal{X}, \mathcal{F}_\Xi, q_\xi).$$

Elle fonde au passage la notion de **sémi-modèle staistique pour un ensemble mesuré**  $(\Xi, d\xi)$ .

Des discussions menée sur la partition de l'unité  $f_\Xi$  le lecteur **doit** retenir les **conclusions majeures** suivantes.

(1). Les définitions des métriques  $q_\xi \nabla(x)$ ,  $g_\xi(x) \in T_{(x,\xi)}^* \mathcal{X}$  et  $g(x) \in T_x^* X$  sont **intrinsèques**.

(2). Le résultat de l'intégration lelong des feuilles de  $\mathcal{F}_\Xi$

$$\int_{\Xi} f_\xi(x) \nabla_\zeta(d\log(f_\xi))(\zeta') d\xi$$

est **indépendant du choix de la connexion basique**(i.e. dans  $\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{F}_\Xi}$ )  $\nabla$  cependant l'opération

$$(\log(f_\xi)) \rightarrow \nabla(d\log(f_\xi))$$

sous le signe  $\int_{\Xi}$  devient un opérateur **cobord** d'un complexe de cochaine si l'on choisit une **connexion basique localement plate**.

D'une façon générale le sous-ensemble  $X_g$  des points où la métrique projetable  $g$  est de rang maximal est une sous-variété ouverte de la variété  $\mathcal{X}$ . Le noyau de  $g$  définit dans  $X_g$  une distribution régulière complètement intégrable. La métrique sémi-définie  $g$  définit dans  $X_g$  un feuilletage  $K$  qui est transversalement riemannien.

### 15.2.1 SEMI-MODELES

Nous conservons la notation utilisée ci-dessus. Nous posons la définition suivante

**Définition 15.5** *Un semi-modèle statistique pour un ensemble mesuré  $(\Xi, d\xi)$  est un couple  $((X, \nabla), \{q_\xi, \xi \in \Xi\})$  jouissant des trois propriétés suivantes.*

- (1)  $(X, \nabla)$  est une variété localement plate,
- (2) Dans  $\mathcal{X} = X \times \Xi$  l'application  $(\zeta_x, \zeta'_x) \rightarrow q_\xi(x)(\zeta_x, \zeta'_x)$  est une métrique sémi-définie positive transverse au feuilletage  $\mathcal{F}_\Xi$  dans  $\mathcal{X}$ .
- (3) Pour tout  $\xi \in \Xi$  chaque forme bilinéaire  $q_\xi$  est un 2-cocycle du KV complexe scalaire  $C_\tau(A_\nabla, \mathbb{R})$ .

Modulo la notation ad hoc le feuilletage  $\mathcal{F}_\Xi$  de  $\mathcal{X} = X \times \Xi$  est transversalement affine. Pour que la forme bilinéaire projetable ( donc basique)

$$(\zeta, \zeta)' \rightarrow \int_{\Xi} f_\xi(x) q_\xi(\zeta, \zeta') d\xi$$

soit une métrique riemannienne dans  $X$  faut et il faut et il suffit que dans  $\mathcal{X}$  la forme symétrique

$$(\zeta, \zeta')_{(x, \xi)} \rightarrow q_\xi(x)(\zeta, \zeta')$$

soit transversalement définie positive.

Avant de poursuivre je vais enrichir la structure d'espace mesuré  $(\Xi, d\xi)$  de l'hypothèse supplémentaire *HS* qui suit est une mesure de Radon de mesure totale  $\int_{\Xi} \chi(\xi) d\xi$  finie.

Sous l'intégrale ci-dessus  $\chi(\xi)$  est la fonction caractéristique de  $\{\xi\}$ . Par  $d\xi$ -intégration lelong des feuilles de  $\mathcal{F}_\Xi$  on obtient la forme bilinéaire sémi-définie positive projetable  $\mathbf{Q}$  par

$$\xi \xrightarrow{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(x)(\zeta_x, \zeta'_x) = \int_{\Xi} q(x, \xi)(\zeta_x, \zeta'_x) d\xi.$$

L'hypothèse de dérivation sous le signe  $\int_{\Xi}$  assure que  $\mathbf{Q}$  est un 2-cocycle du complexe  $C_\tau(A_\nabla, \mathbb{R})$ .

Ainsi le trio  $(X, \nabla, \mathbf{Q})$  est un structure (localement) hessienne sémi-définie positive.

**Lemme 15.2** *Sous l'hypothèse supplémentaire **HS** les assertions suivantes sont équivalentes.*

- $a_1.$   $(X, g)$  est une structure de variété riemannienne dans  $X$ ,
- $a_2.$   $(X, \mathbf{Q})$  est une structure de variété riemannienne dans  $X$ .

**OSONS**

A partir de maintenant je ne m'intéresse qu'aux **sémi-modèles définis**. Ce sont des sémi-modèles dans lesquels l'une des assertions du dernier lemme ci-dessus est vraie.

**Définition 15.6** Dans l'espace topologique feuilleté  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}_\Xi)$  la forme bilinéaire transverse  $q_\xi(x)$  est transversalement exact s'il existe une 1-cochaîne transverse

$$(x, \xi) \rightarrow \tilde{B}(x, \xi) \in C_r^1(A_\nabla, \mathbb{R})$$

tel que

$$\tilde{q}(x, \xi)(\zeta_x, \zeta'_x) = (db(\zeta, \zeta'))(x, \xi).$$

**Théorème 15.3** Sous l'hypothèse supplémentaire **HS** les deux affirmations qui suivent sont équivalentes

1. Le cocycle projetable  $\mathbf{Q}$  est exact dans  $X$ .
2. Le cocycle  $q$  est transversalement exact dans  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}_\Xi)$ .

Dans  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}_\Xi)$  nous dirons que l'espace des feuilles  $X = \mathcal{F}_\Xi \setminus \mathcal{X}$  est un modèle statistique pour le feuilletage mesuré  $\mathcal{F}_\Xi$ . La métrique de Fisher projetable  $g$  est obtenue par **écrasement d'une métrique transversalement hessienne** suivi de **l'intégration lelong des feuilles** de  $\mathcal{F}_\Xi$ . En langage de probabilité on dit que  $g(x)$  est l'espérance mathématique de  $q_\xi(x)$

**Théorème 15.4** Dans un **sémi-modèle défini**  $(X, \nabla, q_\xi)$ ,  $\xi \in \Xi$  la métrique de Fisher est l'espérance mathématique du cocycle transversalement hessienne  $q_\xi(x)$ .

Si l'ensemble mesuré  $(\Xi, d_\xi)$  satisfait l'hypothèse supplémentaire **HS** l'espace des feuilles

$$X = \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{F}_\Xi}$$

hérite de la  $d\xi$ -intégration lelong des feuilles de la structure de variété localement hessienne  $(X, \nabla, \mathbf{Q})$ .

**Théorème 15.5** Soit  $(\Xi, d_\xi)$  un espace mesuré satisfaisant l'hypothèse supplémentaire **HS**.

A tout (semi-)modèle pour  $(\Xi, d_\xi)$  on peut attacher une partition de l'unité  $f_\Xi = \{f_\xi, \xi \in \Xi\}$ .

## ESQUISSE DE PREUVE.

Soit  $(X, \nabla, q_\xi)$  un sémi-modèle pour  $(\Xi, d_\xi)$ . Pour chaque  $q_\xi$  je choisis un recouvrement relativement compact et localement fini compact  $U_{(\xi, j)} \subset X$ ,  $j \in \mathcal{J}_\xi$  avec la consigne suivante. Dans chaque  $U_{(\xi, j)}$  le cocycle  $q_\xi$  est exact. Il y prend la forme

$$q_\xi = \nabla(dh_{(\xi, j)})$$

avec  $h_{(\xi,j)} \in C^\infty(U_\xi(x))$ . Posons

$$g_\xi(y) = \exp\left(\sum_{j \in \mathcal{J}} (h_{(\xi,j)}(y))\right)$$

et

$$f_\xi(y) = \frac{g_\xi(y)}{\int_{\Xi} g_\xi(y) d\xi}.$$

Si deux fonctions

$$y \in X \rightarrow h_{(\xi,j)}(y)$$

et

$$y \in X \rightarrow h'_{(\xi,j)}(y)$$

vérifient

$$\nabla dh_{(\xi,j)} = \nabla dh'_{(\xi,j)}$$

alors

$$y \rightarrow h_{(\xi,j)}(y) - h'_{(\xi,j)}(y)$$

est une fonction affine dans  $(X, \nabla)$ .

La famille  $f_\Xi = \{f_\xi, \xi \in \Xi\}$  est une partition de l'unité associée, c'est à dire

$$\int_{\Xi} f_\xi(x) d\xi = 1$$

quel que soit  $x \in X$ . Cette partition de l'unité  $f_\Xi$  ci-dessus ne vérifie pas

$$q_\xi = \nabla(d \log(f_\xi)).$$

Je note  $f_\Xi^q$  la partition  $\{f_\xi\}$  ci-dessus.

**Définition 15.7** *Le **sémi-modèle défini**  $(X, \nabla, q_\xi)$  indexé par  $(\Xi, d\xi)$  est séparante si on peut choisir les fonctions locales  $h_{\xi,j}$  de sorte la partition associée  $f_\Xi^q$  soit séparante.*

J'ai décrit un procédé de construction qui partant de  $f_\Xi^q$  aboutit à une métrique de Fisher dans  $X$  via les opérations d'écrasement et d'intégration lelong des feuilles de l'espace topologique feuilleté  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}_\Xi)$ . La métrique ainsi obtenu est notée  $g^q$ .

**Je n'ai pas examiné ce qui se produit quand on ajoute des fonctions locales affines aux  $h_{\xi,j}$ .** Ce que je puis énoncer est le théorème suivant.

**Théorème 15.6** *Soit  $(\Xi, d\xi)$  un espace mesuré vérifiant l'hypothèse **HS**. Tout **sémi-modèle défini** séparant  $((X, \nabla, q_\xi), \xi \in \Xi)$  génère des structures de modèle statistique, des structures de Fisher  $(X, g^q)$ , et des structures localement hessiennes  $(X, \nabla, \mathbf{Q})$ . Les deux dernières structures sont obtenues respectivement par le procédé **écrasement-intégration lelong des feuilles** et par **intégration lelong des feuilles** dans l'espace topologique feuilleté  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}_\Xi)$*

**Définition 15.8** Un (sémi-)modèle est séparante lorsque l'on peut choisir les  $f_{\Xi} = \{f_{\xi}, \xi \in \Xi\}$  séparante.

**Définition 15.9** Un modèle statistique pour  $(\Xi, d\xi)$  est un sémi-modèle statistique séparante.

**Théorème 15.7** Toute structure de variété localement hessienne  $(X, \nabla, g)$  génère des partitions de l'unité  $f_{\Xi}^g$  et des structures de **sémi-modèles définis**. Si une des partitions de l'unité est séparante alors la structure  $(X, \Xi, f_{\Xi}^g)$  est un modèle statistique pour  $(\Xi, d\xi)$

### Esquisse de démonstration.

Soit  $(X, \nabla, g)$  une variété localement hessienne. Ceci veut dire que  $(X, \nabla)$  est une structure de variété localement plate et  $g\mathbb{Z}_r^2(A_{\nabla}, \mathbb{R})$  est un cocycle symétrique défini positif.

Je vais choisir un recouvrement ouvert  $\{U_{\xi}, \xi \in \Xi\}$  indexé par un ensemble  $\Xi$  jouissant des propriétés suivantes.

1. Le recouvrement est localement fini et chaque ouvert  $U_{\xi}$  est relativement compact.
2. Chaque ouvert  $U_{\xi}$  contient support d'une fonction différentiable à support compact  $h_{\xi}$  solution locale de  $g = \nabla d(h)$ , i.e.  $\forall \zeta, \zeta' \in \mathcal{X}(U_{\xi})$  on a  $g(\zeta, \zeta') = \zeta(\zeta'(h)) - \nabla_{\zeta}\zeta'(h)$ .

On équipe l'ensemble  $\Xi$  de la tribu engendrée par les parties finies et de la mesure de comptage  $d\xi$ .

Je définis les fonctions  $h \in \mathcal{F}(X)$  et  $f_{\xi} \in \mathcal{F}(X)$  par les formules suivantes,

$$h(x) = \exp\left(\sum_{\xi} h_{\xi}(x)\right),$$

$$f_{\xi}^g(x) = \frac{h_{\xi}(x)}{\int_{\Xi} h(s) d\xi}.$$

Puisque le recouvrement ouvert  $\{U_{\xi}, \xi \in \Xi\}$  est localement fini ces fonctions sont bien définies. La famille  $f_{\Xi}^g = \{f_{\xi}, \xi \in \Xi\}$  est une partition de l'unité dans la variété  $X$  indexée par  $(\Xi, d\xi)$ .

Conformément à la notation utilisée je pose  $\mathcal{X} = X \times \Xi$ . Je mets en marche le procédé qui part des données  $(X, \nabla, f_{\Xi}^g)$  pour aboutir à une métrique de Fisher dans  $X$ .

### DYNAMIQUES.

Soit  $((X, \nabla), q_{\xi})$  un modèle statistique. Le groupe  $G$  des difféomorphismes

de la variété  $X$  contient quelques sous-groupes remarquables dont certains sont des groupes de Lie. En voici des exemples.

- (1) Le groupe  $Isom(X, g)$  des isométries de  $(X, g)$ .
- (2) Le groupe  $Isom(X, \mathbf{Q})$  des isométries de  $(X, \mathbf{Q})$ .
- (3) Le groupe  $Aff(X, \nabla)$  des transformations affines de  $(X, \nabla)$ .
- (4) Les groupes  $\mathbf{G}_\xi = Isom(X, q_\xi)$
- (5) Le groupe  $\mathbf{G}_I = Diff(X, \{q_\xi\})$  formé des  $\gamma \in G$  qui préservent globalement l'ensemble  $\{q_\xi\}$ .

Les trois premiers sont des groupes de Lie de dimension finie. Si chacun des formes quadratiques  $q_\xi$  est de rang constant, chaque groupe  $\mathbf{G}_\xi$  est un groupe de Lie dimension infinie contenant un sous-groupe de Lie distingué de codimension finie. Le groupe  $\mathbf{G}_I$  est un sous-groupe de Lie du groupe de Lie  $Isom(X, \mathbf{Q})$ .

Ces groupes doivent avoir à dire sur la Géométrie de l'Information.

## ADDENDA

Avant de poursuivre je reviens sur un point que je considère comme des plus intéressants en Géométrie de l'Information dans le sens de S. Amari.

Dans *Methods of Information Geometry* Amari examine la distinction entre les métriques de Fisher et les autres métriques riemanniennes dans la même variété. Ce problème de distinction conduit à des thèmes de discussions intéressants. J'en ai abordé quelques uns. Je ne me suis pas attardé sur la notion de  $\alpha$ -connexion. On peut les traiter à l'aide de certains des KV complexes de chaîne adaptés que j'ai décrits dans ces notes.

La KV cohomologie scalaire est un outil adapté l'étude structure globale de modèle statistique. Je l'ai utilisée pour discuter de la métrique (ou structure) de Fisher.

H. Shima a déjà signalé que des nombreux modèles statistiques classiques sont des variétés localement hessiennes.

Un résultat de ces notes montre que tout modèle vérifiant **HS** est localement hessien.

### 15.2.2 PROBLEME DE PLONGEMENT AFFINE

En général un modèle statistique de dimension  $m$  n'est pas affinement plongeable dans  $\mathbb{R}^m$ . Les statisticiens intéressés à la question n'ignorent pas la question ils se résolvent à se limiter aux modèles euclidiens faute d'outils d'évaluation des obstructions aux plongements affines. Le théorème de convexité de Koszul en suggère l'idée mais c'est la KV cohomologie scalaire qui fournit un cadre adapté.

Les modèles statistiques qui possèdent des plongements affines sont de deux types suivants.

(1). Des modèles locaux des vrais modèles statistiques (i.e. des cartes locales).

(2). Des images par le Développement (ou par le déroulement de) des revêtements universels des vrais modèles.

Pour ces dernier les obstructions au plongement affine sont les classes localement hessiennes.

Les dévisages que j'ai mis en évidence éclaire les rapports étroits entre les métriques de Fisher et convexité de Koszul. Ces liens étroits sont tissés par la KV cohomologie scalaire des variétés localement plates.

## FAIRE LE POINT

Pour éviter une fuite en avant on peut pratiquer celle en arrière.

*VOICI UN ORDRE DE MISSION.*

### ETAPE 0.

Nous avons remarqué que le statut de MODELE STATISTIQUE dans une variété  $X$  est un privilège de certaines partitions de l'unité  $(X, f_{\Xi})$ . De ces priprivilège trois sont remarquables. Les voici.

(1). La famille  $f_{\Xi} = \{f_{\xi}, \xi \in \Xi\}$  est indexée par un **ensemble mesuré**  $(\Xi, d\xi)$ .

et l'expression partition de l'unité signifie qu'en chaque point  $x \in X$

$$\int_{\Xi} f_{\xi}(x) d\xi = 1.$$

(2). La famille  $f_{\Xi}$  jouit du **pouvoir de séparation** dans le sens que  $\forall (x, x') \in (X \times X - \Delta(X)) \exists \xi \in \Xi$  tel que

$$f_{\xi}(x) \neq f_{\xi}(x').$$

(3). La famille  $f_{\Xi}$  est **définie**. Le sens de définie est qu'en chaque  $x \in X$  la forme bilinéaire

$$T_x X \times T_x X \rightarrow^g \mathbb{R}$$

définie par

$$g(\zeta, \zeta') = \int_{\Xi} f_{\xi}(x) \zeta(\log(f_{\xi})) \zeta'(\log(f_{\xi})) d\xi$$

est **définie**.

On pourrait prendre cette seule étape pour ce qu'est un modèle statistique géométrique pour l'ensemble mesuré  $(\Xi, d\xi)$ .

A la métrique riemannienne  $g$  on apposerait la griffe **métrique de Fisher**. La géométrie globale et l'analyse globale y trouveraient leur compte.

## ETAPE 1.

Les insuffisances de ETAPE 0 viennent du besoin d'analyse locale, c'est à dire du calcul en COORDONNEES NUMERIQUES. En effet on a vu que dans un système des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_m)$  le tenseur métrique prend la forme de hessienne d'une fonction différentiable locale  $h(x)$  que nous appelons fonction potentielle locale. Cette situation est un BON MODELE EUCLIDIEN dans le sens du pionnier S. Amari, mais il n'est que local.

Ce modèle euclidien local souffre de profondes faiblesses. A chaque système des coordonnées locales sa fonction potentielle locale. Pire, les difféomorphismes locaux changements des coordonnées ne préservent rien de ce qui est essentiel. C'est presque de l'indiscipline pour ne pas dire du désordre.

La géométrie et la KV-topologie des variétés localement plates arrivent réguler les comportements.

## ETAPE 2.

Plaçons nous sous l'hypothèse **HS** Les cadres sont désormais des variétés localement plates  $(X, \nabla)$ .

Les caisses à outils sont des semi-modèles  $((X, \nabla), (q_\xi, \xi \in \Xi))$  auxquels on attache la LOGISTIQUE  $(X, \nabla, g, \mathbf{Q})$  avec  $Q \in Z^2(A_\nabla, \mathbb{R})$ .

Si nous nous arrêtons ici la structure de Fisher  $(X, \nabla, g)$  ne ressemblera à un modèle habitant un espace euclidien que localement. La raison est que la classe de cocycle  $Q$  est localement triviale.

Le gain est ici l'invariance de modèles locaux sous changement des coordonnées affines. Voilà une STRATEGIE efficace.

Pour obtenir un modèle euclidien global il faut s'élever dans le revêtement universel  $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$  et y monter toute la LOGISTIQUE pour y disposer de la nouvelle qui suit.  $(\tilde{X}, \tilde{\nabla}, p^*(g), p^*(Q))$ .

Maintenant on envoie globalement dans un espace euclidien l'arsenal ci-dessous

$$(\tilde{X}, \tilde{\nabla}, \tilde{g}, \tilde{\mathbf{Q}}).$$

Le vaisseau de transport est le développement (ou le déroulement)  $D$  de  $(\tilde{X}, \tilde{\nabla})$ .

Le développement est un étalement (difféomorphisme local).

## POUR MEMOIRE.

Juste un rappel pour fixer les idéés.

Considérons les espaces pointés  $(0, [0, 1])$  et  $(x_o, X)$ . Je rappelle qu'à difféomorphisme près la variété  $\tilde{X}$  est l'espace

$$\Pi[(0, [0, 1]), (x_o, X)]$$

des classes d'homotopie des chemins différentiables par morceaux  $[0, 1] \xrightarrow{c} X$  tels que  $c(0) = x_o$ .

Lelong du chemin  $c(t)$  on note  $\tau(s)$  le transport parallèle

$$T_{x_o}X \xrightarrow{\tau(s)} T_{c(s)}X.$$

On identifie  $T_{x_o}X$  avec l'espace euclidien  $\mathbb{R}^m$  et on définit  $\tilde{X} \xrightarrow{D} \mathbb{R}^m$  en posant

$$D(c) = \int_0^1 \tau^{-1}(s) \left( \frac{dc(s)}{ds} \right) ds.$$

Le membre de droite de la dernière l'égalité ne dépend que de la classe d'homotopie  $[c]$  du chemin  $c(t)$ .

On obtient ainsi une application de  $\tilde{X}$  dans  $\mathbb{R}^m$  appelée déroulement.

### ETAPE 3.

Pour avancer nous supposons maintenant que la classe de cohomologie  $[\mathbf{Q}] \in H_{KV}^2(A_\nabla, R)$  est nulle. Il est alors peu coûteux de faire l'hypothèse que  $(X, \nabla, Q)$  est une structure de variété localement plate hyperbolique. En équipant  $\mathbb{R}^m$  de la connexion euclidienne  $\nabla_0$  on obtient un homéomorphisme de variété localement plate

$$(\tilde{X}, \tilde{\nabla}, D) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \nabla_0).$$

dont l'image  $\tilde{X}$  est un domaine convexe dans  $\mathbb{R}^m$  ne contenant aucune droite entière.

### ETAPE 4.

Dans le domaine convexe saillant  $\Omega$  la LOGISTIQUE  $(D, q_\xi, \tilde{g}, \tilde{\mathbf{Q}})$  définit une structure de modèles statistique.

*MISSION ACCOMPLIE*

## 16 FEUILLETAGE $\nu$ -MESURE TRANSVERSALEMENT AFFINE.

Dans cette dernière section je vais reformuler des idées déjà mises en oeuvre dans la section précédente. Il s'agit de l'utilisation des opération d'écrasement par une partition de l'unité et de l'opération d'intégration lelong des feuilles d'une feuilletage. La notion de feuilletage  $\nu$ -mésuré est préférable à celle de feuilletage orienté.

Je rappelle les défintions utilisées dans ces notes.

**Définition 16.1** *Soit  $\mathcal{X}$  une variété équipée d'un feuilletage  $\mathcal{F}$ . Ce dernier est dit  $\nu$ -mésuré si chaque feuille  $\mathcal{F}(x)$  porte une  $\nu$ -mésure de Radon notée  $d\nu_x$  de mesure totale finie.*

### EXEMPLES

(a) Le groupe linéaire  $GL^+(n, \mathbb{R})$  est feuilleté par les classes  $SO(n, \mathbb{R})M$ , ,  $M \in GL^+(n, \mathbb{R})$ . La variété des feuillee est la variété des matrices symétriques définies positives. La fibration

$$GL^+(n, \mathbb{R}) \rightarrow \frac{GL^+(n, \mathbb{R})}{SO(n, \mathbb{R})}$$

est trivial.

Pour avoir un feuilletage mesure on équipe  $SO(n, \mathbb{R})$  de la mesure de Haar invariante à droite.

(b) Soit  $G$  un groupe de Lie ayant un nombre fini de composante connexes muni de la mesure de Haar invariante à droite. L'espace total de tout  $G$ -fibré principal possède un feuilletage mésuré canonique.

(c). Tout revêtement fini donne lieu à un feuilletage (discret) mésuré, 'mésure de comptage dans les fibres).

**Définition 16.2** *On dira d'un feuilletage  $\nu$ -mésuré  $(\mathcal{F}, d\nu)$  qu'il est transversalement différentiable si pour toute fonction différentiable  $f$  la fonction*

$$x \rightarrow \int_{\mathcal{F}}(x)f(y)d\nu_x(y)$$

*est différentiable.*

L'opération intégration lelong des feuilles est une machine de productions des intégrable premières. Ce sont donc des feuilletage simples. C'est que l'espace des feuilles  $\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{F}}$  est une variété. Ainsi la projection canonique

$$\mathcal{X} \rightarrow X = \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{F}}$$

est une fibration différentiable.

(1). Les feuilletages mesurés sont le cadre qui convient à la géométrie de l'information. La définition que j'en donnée en fait des feuilletages transversalement affine dont la fibration canonique

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{F}}$$

est localement triviale de fibré type un espace topologique mesuré de mesure totale finie  $(\Xi, d\nu)$ .

(2). une carte au dessus d'un ouvert  $U \subset X$  est un homéomorphisme mesuré  $\varphi$  de  $\pi^{-1}(U)$  sur  $U \times \Xi$  qui induit un isomorphisme de  $(\pi^{-1}(x), d\nu_y)$  sur  $(\Xi, d\nu)$  où  $\pi(y) = x$ .

(3). Les homéomorphisme changements de carte du fibré habitent le groupe  $Homeo(\Xi, d\nu)$  des homéomorphismes  $\phi$  de  $X$  qui vérifient la condition

$$\int_{\Xi} h(\phi(\xi))d\nu(\xi) = \int_{\Xi} h(\xi)d\nu(\xi)$$

$\forall h \in C^0(\Xi)$ .

**Définition 16.3** Une densité de probabilité dans  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, d\nu)$  est une fonction positive  $p$  définie dans  $\mathcal{X}$  telle que pour chaque  $x \in \mathcal{X}$  on a

$$\int_{\mathcal{F}(x)} p(y)d\nu_x = 1.$$

(4). Je fais observer que l'intégration lelong des feuilles est une machine à fabriquer des fonctions densités. En effet si  $f$  est une fonction positive intégrable lelong des feuilles de  $\mathcal{F}$  alors la fonction

$$y \rightarrow \frac{f(y)}{\int_{\mathcal{F}} f(z)d\nu_y(z)}$$

est une fonction densité dans  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ . La réciproque est vraie, à savoir que tout fonction densité est obtenue par cette machinerie.

(5). Pour que la variété affine  $X = \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{F}}$  soit un modèle statistique pour les feuilles de  $\mathcal{F}$  (donc pour  $(\Xi, d\nu)$ ) il faut et il suffit d'avoir une application différentiable injective de  $X$  dans l'ensemble  $\mathcal{P}(\Xi, d\nu)$  des densités de de fibre type probabilité.

(6). Soit  $G_\nu$  le groupe des homéomorphismes de  $(\Xi, d\nu)$ . Lorsque  $\Xi$  n'est pas connexe la notion de  $G_\nu$ -fibration localement triviale de fibre type  $\Xi$  est preferable à celle de feuilletage  $\nu$ -mesuré.

## Références

- [1] Atiyah M. Complex analytic connection in fiber bundle, *Trans. Amer. Math. Soc.* 85(1951) 181-207.
- [2] Helgason Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. Academy Press, New York.
- [3] Kobayashi S. and Nomisu K. Foundation of Differential Geometry I,II. Weley (Interscience).
- [4] Amari S. and Nagaoka H., Methods of Geometry Information. Translation of Mathematical Monographs. AMS- OXFORD, vol 191.
- [5] Shima H., The Differential Geometry of Hessian Manifolds. World Scientific Publishing CO 2007.
- [6] Chevalley C. and Heilenberg S., Cohomolgy Theory of Lie Groups and Lie Algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 63,(1948)85-124.
- [7] Koszul J-L., Homologie et Cohomologie des Algèbres de Lie, *Bull. Soc. Math. France* 78(1950) 656-127.
- [8] Hochschild G. On the cohomology Groups of associative Algebras, *Ann of Math (2)* 46 (1945) 58-67.
- [9] Hochschild G. On the cohomology Theory for Associative Algebras, *Ann of Math (2)* 47 (1946) 568-579.
- [10] Hochschild G. and Serre J.P. Cohomology of Lie Algebra, *Ann of Math (2)* 57 (1953) 591-603.
- [11] Hochschild G. and Serre J.P. Cohomology of group extensions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 74 (1953) 110-134.
- [12] Konsevich M. Deformation quantization, *Lett. Math. Phys.* vol 66(2003) n°3, 157-216.
- [13] Koszul J-L., Multiplicateurs et classes caratéristiques, *Trans. Amer. Math Soc.* 89 (1958) 256-266.
- [14] Singer IM. and Sternberg S. The Infinite Groups of Lie and Cartan, *Journal Analyse Math.* 15 (1965) 1-114.
- [15] Spencer D. Deformations of Structures Defined by Transitive continuous pseudogroups, *Ann of Math.* 78 (1962) 306-445.
- [16] Spencer D. Some remarks on Homological Analysis and Structure, *Proceeding of Symposia in Pure Math. (3) Differential Geometry.* (1961) 56-86.
- [17] Spencer D.] Overdetermined Systems of Partial Differential Equations, *Bull Amer. Math. Soc* 75 (1969) 179-239.
- [18] Koszul J-L. Sur les Algèbres de Vinberg, *Cours Université de Genève* (1968).
- [19] Nijenhuis A. Sur une classe de Propriétés communes à Quelques type différents d'Algèbres, *Enseignement Mathem. (2)* 14 (1969)179-239.

- [20] Koszul J-L. Déformation des Variétés Localement Plates, *An Inst. Fourier* .
- [21] Nguiffo Boyom M. Réductions Kählériennes dans les Groupes de Lie Résolubles et Applications, *Osaka J. Math. Vol 47,N°1 (2010) 237-283*.
- [22] Nguiffo Boyom M. The cohomology of Koszul-Vinberg algebras, *Pacific J. Math. Vol 225,N°1 (2006) 119-153*.
- [23] Nguiffo Boyom M. KV cohomology of algebroids and Poisson manifolds, *Int. J. Math. Vol 16, (2005) 1-29*.
- [24] Koszul J-L. Variétés localement plates et convexité, *Osaka J. Math. 2(1965) 285-290*.
- [25] Vey J. Sur une Notion de Convexité, *C.R. Acad. Sci Paris. Lie. 266(1968) 622-624*.
- [26] Vinberg E.B and Gindikin S.G. Kähler Manifolds Admitting a Transitive Solvable Group of Automorphisms, *Math. Sb. 74 (1967) 357-377*.
- [27] Vinberg E.B The Theory of convex homogeneous cones , *Trans. Moscow Math. Soc. 340-403*.
- [28] Lewy H. An example of a smooth linear partial differential without solution, *Ann. of math. Soc. 2(66)1957, 155-158*.
- [29] Kaup W. Hyperbolische Raume, *Ann. Inst. Fourier 18(1968), 303-330*.