



Sur les limites de la dispersion de certaines estimations

Author(s): G. Darmois

Source: *Revue de l'Institut International de Statistique / Review of the International Statistical Institute*, Vol. 13, No. 1/4 (1945), pp. 9-15

Published by: International Statistical Institute (ISI)

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/1400974>

Accessed: 21/12/2009 05:41

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of JSTOR's Terms and Conditions of Use, available at <http://www.jstor.org/page/info/about/policies/terms.jsp>. JSTOR's Terms and Conditions of Use provides, in part, that unless you have obtained prior permission, you may not download an entire issue of a journal or multiple copies of articles, and you may use content in the JSTOR archive only for your personal, non-commercial use.

Please contact the publisher regarding any further use of this work. Publisher contact information may be obtained at <http://www.jstor.org/action/showPublisher?publisherCode=isi>.

Each copy of any part of a JSTOR transmission must contain the same copyright notice that appears on the screen or printed page of such transmission.

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.



International Statistical Institute (ISI) is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Revue de l'Institut International de Statistique / Review of the International Statistical Institute*.

<http://www.jstor.org>

SUR LES LIMITES DE LA DISPERSION DE CERTAINES ESTIMATIONS

par G. Darmois

Dans un mémoire intitulé: „Sur l'extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons”¹⁾, M. Maurice Fréchet a étudié l'estimation, sur des échantillons de taille quelconque, du paramètre unique θ d'une loi de probabilité. La variable aléatoire $H_n (X_1, X_2, \dots, X_n)$ qui doit fournir une estimation de θ , connaissant l'échantillon x_1, x_2, \dots, x_n , est assujettie à la condition que son espérance mathématique soit égale à l'inconnue θ (ou à une condition plus générale, que la différence $E(H_n) - \theta$ soit infiniment petite avec $\frac{1}{n}$).

Les résultats du mémoire de M. Fréchet peuvent être étendus à un nombre quelconque de paramètres, et certains d'entre eux au cas où l'échantillon est constitué par des résultats d'épreuves non indépendantes.

Nous ferons sur les lois de probabilité utilisées les mêmes hypothèses, relatives à l'existence des moments du second ordre, et à la possibilité d'appliquer la règle de dérivation d'une intégrale par rapport à un paramètre.

Le premier résultat. — Soit $T = H_n (X_1, X_2, \dots, X_n)$

La loi de probabilité élémentaire de x_1, x_2, \dots, x_n sera prise sous la forme: $\mathcal{T}(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ en particulier, on aura, dans le cas des épreuves

indépendantes $\mathcal{T} = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta) = \prod_{j=1}^n f(x_j, \theta)$,

$f(x, \theta) dx$ étant la loi de probabilité élémentaire étudiée.

On aura les deux conditions:

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) dx_1 \dots dx_n = 1$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} H(x_1, x_2, \dots, x_n) \mathcal{T} dx_1, \dots, dx_n = \theta$$

Dans ces conditions, on obtient, en posant

$$(3) \quad \begin{aligned} E(T - \theta)^2 &= \sigma_T^2 & E\left(\frac{1}{\mathcal{T}} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta}\right)^2 &= J & 1 &\leq \sigma_T^2 J \\ & & \sigma_T^2 &\geq \frac{1}{J} \end{aligned}$$

C'est l'inégalité qui borne la dispersion des estimations T dont l'espérance mathématique est égale à θ .

Mais on voit que cette inégalité ne suppose pas l'indépendance des variables X_1, X_2, \dots, X_n .

Si ces variables sont indépendantes, l'expression de J prend la forme simple

$$n E \left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2$$

Généralisation au cas de plusieurs paramètres. Notions préliminaires. — Il y a lieu de développer ici des considérations très élémentaires sur la notion qui, dans le cas de plusieurs variables aléatoires, peut généraliser la notion d'écart type. Considérons d'abord une loi de Laplace-Gauss à deux variables x et y dont la forme élémentaire soit:

$$(4) \quad \bullet A e^{-\frac{1}{2} H(x, y)} dx dy.$$

Cette loi de probabilité est entièrement déterminée par la connaissance de la forme quadratique, définie positive $H(x, y)$, ou par la connaissance de l'ellipse $H(x, y) = 1$, qu'on peut appeler l'indicatrice de cette loi de probabilité. Nous la supposons rapportée à son centre. Il est bien clair que si deux lois de probabilité L_1 et L_2 de même centre sont telles que l'indicatrice de L_2 soit intérieure à l'indicatrice de L_1 , ces deux indicatrices correspondent à la même probabilité, ainsi d'ailleurs que deux ellipses homothétiques dans le même rapport. On pourra dire que la loi L_2 est moins dispersée que la loi L_1 et ceci se traduirait analytiquement par le fait que, pour un point x, y quelconque, on aurait:

$$H_2(x, y) > H_1(x, y).$$

La forme réciproque. — La fonction caractéristique de la loi (4) a pour expressions

$$(5) \quad \Phi(u, v) = E e^{i(u x + v y)} = e^{-\frac{1}{2} K(u, v)}$$

$K(u, v)$ est la forme quadratique réciproque de $H(x, y)$. On peut dire que

$$(6) \quad K(u, v) = 1$$

est la condition pour que la droite $u x + v y = 1$ soit tangente à l'indicatrice.

L'équation (6) peut être prise pour équation tangentielle de l'indicatrice et la relation de deux indicatrices dont l'une est intérieure à l'autre se traduirait par $K_1(u, v) > K_2(u, v)$, le signe d'égalité pouvant intervenir s'il s'agit d'ellipses bitangentes.

Cas d'une loi de probabilité plus générale. — La forme $K(u, v)$ considérée plus haut peut être obtenue par l'égalité de définition

$$(7) \quad K(u, v) = E (u x + v y)^2$$

qui permet d'étendre la notion d'indicatrice à toute loi de probabilité ayant des moments du second ordre. On voit qu'il sera naturel d'attribuer à u, v dans une telle égalité la signification de coordonnées tangentielles.

Signification de l'indicatrice. — Soit une combinaison linéaire à coefficients constants de x et y , $u_0 x + v_0 y = X$

$$\text{On a évidemment } \sigma_X^2 = K(u_0, v_0)$$

Ainsi la droite $u_0 x + v_0 y = \lambda$ sera tangente à l'indicatrice si

$$\lambda^2 = K(u_0, v_0) = \sigma_X^2$$

Considérons deux indicatrices dont l'une est intérieure à l'autre (fig. 1). Les écarts types attribués par les deux lois de probabilité à la même combinaison linéaire $u_0 x + v_0 y$ seront fournis par la construction géométrique des tangentes parallèles à une direction donnée.

Il en résulte évidemment que l'écart type le plus petit sera fourni par l'indicatrice intérieure.

L'écart type de la variable x est donné en particulier par les tangentes à l'indicatrice parallèles à Oy (fig. 2). Ainsi le segment $A'A$ donne la dispersion de x ($OA = -OA' = \sigma_x$).

Les propriétés analogues relatives à un ellipsoïde indicateur sont les suivantes:

2) la combinaison $u_0 x + v_0 y + w_0 z$ a son écart type donné par les plans $u_0 x + v_0 y + w_0 z = \lambda$ tangents à l'indicateur.



Fig. 1.

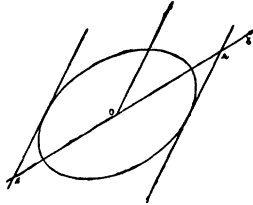


Fig. 2.

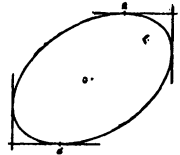


Fig. 3.

3) la projection (x, y) faite parallèlement à une direction quelconque Oz est un point aléatoire qui a pour indicatrice la section par le plan $z = 0$ du cylindre parallèle à Oz et circonscrit à l'ellipsoïde indicateur.

On voit que ces diverses propriétés donnent une signification très précise au fait qu'une ellipse ou qu'un ellipsoïde indicateurs soient intérieurs aux éléments analogues relatifs à une autre loi de probabilité.

D'une façon générale, l'ellipse indicatrice est l'élément géométrique qui paraît le plus apte à jouer, pour deux variables, le rôle que joue l'écart type pour une seule.

Cas de deux paramètres. — Soit une loi de probabilité élémentaire $f(x, \theta_1, \theta_2) dx$ et la loi suivie par x_1, x_2, \dots, x_n : $\mathcal{T}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

On possède deux variables $H_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $H_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ vérifiant les conditions $E(H_1) = \theta_1$, $E(H_2) = \theta_2$.

Nous avons donc les 3 équations:

$$(8) \quad \int \dots \int \mathcal{T} dx_1 \dots dx_n = 1$$

$$(9) \quad \int \dots \int H_1 \mathcal{T} dx_1 \dots dx_n = \theta_1$$

$$(10) \quad \int \dots \int H_2 \mathcal{T} dx_1 \dots dx_n = \theta_2$$

En posant $\frac{1}{\mathcal{T}} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta_1} = U_1$, $\frac{1}{\mathcal{T}} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta_2} = U_2$, on aura par dérivation de (8) (9) (10),

les équations

$$\begin{aligned} E(U_1) &= 0 & E(U_2) &= 0 \\ E(H_1 U_1) &= 1 & E(H_1 U_2) &= 0 \\ E(H_2 U_1) &= 0 & E(H_2 U_2) &= 1 \end{aligned}$$

et, comme on le voit immédiatement,

$$(11) \quad E[(H_1 - \theta_1) \times U_1] = 1 \quad E[(H_2 - \theta_2) \times U_2] = 0$$

$$(12) \quad E[(H_2 - \theta_2) \times U_1] = 0 \quad E[(H_2 - \theta_2) \times U_2] = 1$$

Je considère d'abord la forme quadratique $E[x_1(H_1 - \theta_1) + x_2(H_2 - \theta_2)]^2$

Elle fournit l'indicatrice de la loi de probabilité du couple aléatoire H_1, H_2 . Soit E cette ellipse indicatrice.

Je considère ensuite la forme quadratique $E[\beta_1 U_1 + \beta_2 U_2]^2$

Le théorème que nous avons en vue utilise, non pas cette dernière forme quadratique, mais sa *forme réciproque*. Cette forme réciproque peut être considérée comme l'équation tangentielle d'une certaine ellipse E_0 .

Le théorème est alors le suivant: L'ellipse E est toujours extérieure à E_0 (en tout cas n'a jamais de point intérieur.)

Démonstration. — Pour bien comprendre le principe de cette démonstration, nous allons l'appliquer à retrouver la formule (3). Considérons la forme quadratique

$$E \left[x_1 (T - \theta) + \beta_1 \frac{1}{\mathcal{T}} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} \right]^2 \equiv x_1^2 \sigma_T^2 + 2x_1 \beta_1 + \beta_1^2 J \equiv \Phi(x_1, \beta_1)$$

C'est l'inégalité de Schwarz qui a fourni la formule (3).

On peut raisonner autrement. Soit l'ellipse $\Phi(x_1, \beta_1) = 1$ où x_1, β_1 sont des coordonnées tangentielles de la droite $\xi x_1 + \eta \beta_1 = 1$.

Les droites $\beta_1 = 0$ qui sont tangentes sont telles que $x_1^2 \sigma_T^2 = 1$. Leurs abscisses sont données par $\xi^2 = \sigma_T^2$.

Envisageons maintenant les points de contact A' et A'' des tangentes pour lesquelles $x_1 = 0$ (fig. 3). Ces points de contact sont nécessairement intérieurs à la bande $\xi = \pm \sigma_T$.

Or, l'abscisse d'un tel point est $\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$, soit ici β_1 et l'on a: $\beta_1^2 J = 1$.

L'inégalité $\beta_1^2 = \frac{1}{J} \leq \xi^2 = \sigma_T^2$ qui traduit cette propriété géométrique est précisément l'inégalité (3).

Cas de deux paramètres. — Nous allons appliquer la même remarque à un hyperespace à 4 dimensions.

Considérons la forme quadratique:

$$E \left[x_1 (H_1 - \theta_1) + x_2 (H_2 - \theta_2) + \beta_1 U_1 + \beta_2 U_2 \right]^2 \equiv \Phi(x_1, x_2, \beta_1, \beta_2)$$

comme définissant un hyperellipsoïde $\Phi(x_1, x_2, \beta_1, \beta_2) = 1$. $x_1, x_2, \beta_1, \beta_2$ sont les coordonnées tangentielles du plan $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \eta_1 \beta_1 + \eta_2 \beta_2 = 1$.

Les plans particuliers pour lesquels on a $\beta_1 = \beta_2 = 0$ sont tangents si l'on a la condition: $E[x_1 (H_1 - \theta_1) + x_2 (H_2 - \theta_2)]^2 = 1$.

Cette condition est celle qui définit l'ellipse E.

Considérons maintenant le lieu des points de contact de l'hyper-ellipsoïde avec les plans particuliers pour lesquels on a $x_1 = x_2 = 0$. Ces points sont tous intérieurs à la région définie par l'enveloppe des plans précédemment considérés.

Or, quelles sont les coordonnées ξ_1 et ξ_2 de ces points de contact. Elles sont données par: $\xi_1 = \beta_1, \xi_2 = \beta_2$

L'équation ponctuelle de la projection sur le plan $\xi_1 \xi_2$ du lieu de ces points est donc identique à l'équation: $E[\xi_1 U_1 + \xi_2 U_2]^2 = 1$.

Par conséquent, l'équation tangentielle de cette projection s'obtient en prenant la réciproque de cette forme quadratique. C'est cette équation qui définit l'ellipse E_0 .

Le théorème se trouve ainsi complètement démontré.

On voit qu'il définit une région dans laquelle ne saurait pénétrer l'indicatrice de l'estimation $H_1 H_2$ des deux paramètres θ_1 et θ_2 .

Densités minimisantes, distinguées et quasi-distinguées. — M. Fréchet désigne ainsi les densités de probabilité telles que, en supposant les épreuves indépendantes, l'inégalité (3) devienne une égalité.

Les densités distinguées donnent la solution correspondant au cas où l'on s'impose de garder le paramètre θ_1 ; les densités quasi-distinguées correspondent au cas plus général où l'on peut se ramener par un changement de paramètre aux densités distinguées.

On peut généraliser ces résultats. Indiquons seulement que pour deux paramètres, les densités distinguées ont la forme suivante:

$$(13) \quad \text{Log } f(x, \theta_1, \theta_2) = \frac{\partial \rho}{\partial \theta_1} [x(x) - \theta_1] + \frac{\partial \rho}{\partial \theta_2} [\beta(x) - \theta_2] + \rho(\theta_1, \theta_2) + \gamma(x)$$

où ρ est une fonction des deux paramètres θ_1, θ_2 .

Les densités quasi-distinguées ont la forme:

$$(14) \quad \text{Log } f(x, u, v) = A(u, v) x(x) + B(u, v) \beta(x) + C(u, v) + \gamma(x)$$

Le passage des variables u, v aux variables θ_1, θ_2 se fait par les formules

$$\begin{aligned}\theta_1 \frac{\partial A}{\partial u} + \theta_2 \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial C}{\partial u} &= 0. \\ \theta_1 \frac{\partial A}{\partial v} + \theta_2 \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{\partial C}{\partial v} &= 0.\end{aligned}$$

En particulier, si l'on prend, ce qui est toujours possible, A et B comme variables u, v on aura: $\theta_1 = -\frac{\partial C}{\partial u}$, $\theta_2 = -\frac{\partial C}{\partial v}$, $\rho(\theta_1, \theta_2) = u\theta_1 + v\theta_2 + C$.

La formule (14) correspond à ce que j'ai appelé les lois (à deux paramètres) à estimation exhaustive (sous-entendu, dans les cas des épreuves indépendantes).¹⁾

Au lieu de développer ces points qu'on obtiendra aisément par les méthodes indiquées par M. Fréchet, et convenablement étendues, je préfère insister sur une relation existant entre les théorèmes généraux, et la notion de résumé exhaustif.

Rappel de la notion générale. — Soit un point aléatoire x, x_2, \dots, x_n , dont la loi de probabilité dépend de k paramètres $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$. Si X_1, X_2, \dots, X_n sont de nouvelles coordonnées, fonctions de x_1, x_2, \dots, x_n , du point aléatoire, on dira que X_1, X_2, \dots, X_m ($m \leq n$) constitue un résumé exhaustif si la loi de probabilité liée des variables restantes $X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n$ (les X_1, X_2, \dots, X_m étant fixées), ne dépend plus des paramètres θ_i .

On voit que résumé exhaustif s'entend, exhaustif relativement aux paramètres de la loi de probabilité. Je rappelle que ces notions générales dérivent d'idées introduites par R. A. FISHER.

Expression simple du théorème général. — Tout se ramène à définir l'ellipse ou l'ellipsoïde E_θ . On peut l'obtenir de la manière suivante. La densité de probabilité $\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1, \theta_2)$ considérée comme fonction de θ_1, θ_2 donne l'égalité, où $\delta\mathcal{F}$ est la différentielle totale de \mathcal{F} ainsi considérée.

$$\frac{\delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}} = d\theta_1 U_1 + d\theta_2 U_2$$

$E\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\mathcal{F}}\right)$ définit alors une forme quadratique dont la réciproque donne l'équation (tangentielle) de E_θ .

Etude préalable d'un seul paramètre. — La loi de probabilité élémentaire de x_1, x_2, \dots, x_n ayant toujours la forme $\mathcal{F}[x_1, x_2, \dots, x_n, \theta] dx_1 dx_2 \dots dx_n$, supposons qu'une fonction $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ait la propriété que la loi de probabilité liée du point x_1, x_2, \dots, x_n quand X_1 est donné ne dépende plus du paramètre θ . On aura une identité de la forme

$$(15) \quad \begin{aligned}A(X_1, \theta) dX_1 B X_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) d\xi_1, d\xi_2, \dots, d\xi_{n-1} \equiv \\ \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) dx_1 dx_2 \dots dx_n\end{aligned}$$

Les ξ étant $n-1$ fonctions des x , qui, avec X , constituent les nouvelles coordonnées du point x_1, x_2, \dots, x_n .

On dira donc dans un tel cas que X_1 est résumé exhaustif (relativement à θ) de l'ensemble x_1, x_2, \dots, x_n .

Je dis que, dans ces conditions, on peut se limiter à la recherche des fonctions H qui ne sont fonctions que de X_1 , la borne inférieure fournie par l'inégalité (3) restera la même.

En effet, on aura $\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \theta} \equiv \frac{1}{\mathcal{F}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta}$ et par conséquent $E\left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \theta}\right)^2 = J$.

1) G. DARMOIS. Sur les lois de probabilité à estimation exhaustive (C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, 1935, 204, p. 1215).

G. DARMOIS. Résumés exhaustifs d'un ensemble d'observations (XXIII^e Session de l'Inst. Int. de Stat., Athènes 1936. Bull. de l'Inst. Int. de Stat. XXIX: 2, Athènes 1937, pp. 289-293).

Il en serait de même s'il existait un nombre m de fonctions $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donnant lieu à la propriété que la loi de probabilité liée du point x_1, x_2, \dots, x_n quand X_1, X_2, \dots, X_m sont connus, ne dépende plus du paramètre Θ . X_1, X_2, \dots, X_m est encore résumé exhaustif.

En revanche, nous allons voir que si l'on se limite à chercher parmi les fonctions H , celles qui ne dépendent que de X_1, X_2, \dots, X_m , ce groupe ne constituant pas un résumé exhaustif, la borne inférieure fournie par l'inégalité (3) est à remplacer par une borne moins bonne. La zone interdite à la dispersion est plus étendue si l'on se limite à moins de n variables, sauf si les nouvelles variables constituent un résumé exhaustif.

Considérons en effet la loi de probabilité sous la forme

$A(X_1, X_2, \dots, X_m, \Theta) dX_1 dX_2 \dots dX_m B(X_1, X_2, \dots, X_m, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-m}, \Theta) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-m}$
où cette fois la fonction B dépend non seulement de $X_1, X_2, \dots, X_m, \xi_1, \dots, \xi_{n-m}$ mais aussi de Θ . On a évidemment:

$$\frac{1}{\mathcal{T}} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \Theta} = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \Theta} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \Theta}$$

On en déduit:

$$E\left(\frac{1}{\mathcal{T}} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \Theta}\right)^2 = E\left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \Theta}\right)^2 + E\left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \Theta}\right)^2$$

En effet le terme rectangle a pour expression

$$2 \int \dots \int \frac{\partial A}{\partial \Theta} dX_1 dX_2 \dots dX_m \frac{\partial B}{\partial \Theta} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-m}$$

Or si l'on intègre à X_1, X_2, \dots, X_m constants pour commencer, l'intégrale

$\int \dots \int \frac{\partial B}{\partial \Theta} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-m}$ est nulle, étant la dérivée de l'intégrale

$\int \dots \int B d\xi_1 \dots d\xi_{n-m}$ qui est égale à l'unité.

Ainsi, l'emploi de X_1, X_2, \dots, X_m seuls donnera la borne $\frac{1}{J_1}$

$$J_1 = E\left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \Theta}\right)^2 = J - E\left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \Theta}\right)^2 \quad \frac{1}{J_1} \geq \frac{1}{J}$$

Cas de plusieurs paramètres. — Supposons qu'il y ait k paramètres $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$ et soit $\mathcal{T}(x_1, x_2, \dots, x_n, \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k)$ la densité de probabilité. Nous avons vu qu'en

posant: $\frac{\partial \mathcal{T}}{\mathcal{T}} = d\Theta_1 U_1 + \dots + d\Theta_k U_k$, $E\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\mathcal{T}}\right)^2$ définit une forme quadratique qui donne en somme l'équation ponctuelle de l'ellipsoïde E_0 .

Supposons d'abord que X_1, X_2, \dots, X_m constitue un résumé exhaustif relativement à $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$, c'est-à-dire que l'on ait:

$$\mathcal{T} dx_1 \dots dx_n \equiv A(X_1, \Theta_j) dX_1 \dots dX_m B dX_m + 1 \dots dX_n$$

où B dépende de tous les X_i mais ne dépende plus des Θ_j . On aura évidemment $\frac{\partial \mathcal{T}}{\mathcal{T}} \equiv \frac{\partial A}{A}$

Si donc on se limite à des fonctions H qui ne soient fonctions que de X_1, X_2, \dots, X_m , on ne changera pas l'ellipse E_0 .

Mais si B dépend des Θ_j , on aura comme précédemment:

$$E\left(\frac{\partial F}{F}\right)^2 = E\left(\frac{\partial A}{A}\right)^2 + E\left(\frac{\partial B}{B}\right)^2$$

Par conséquent, on définira par la forme quadratique $E\left(\frac{\partial A}{A}\right)^2$ une ellipse extérieure à l'ellipse E_0 .

C'est le théorème que nous voulions démontrer.

Summary:

- a) The first part of the present paper includes a generalisation of certain results obtained by Mr. Maurice Fréchet (Revue Inst. Int. de Stat., 1943 : 3/4, pp. 182—205). The generalisation has been made in two directions:
1. the results obtained for one parameter are extended to an arbitrary number of parameters by the introduction of the ellipsoid-indicatrix of a probability law. The ellipsoids relating to an estimate of the parameters are outside a fixed ellipsoid.
 2. these results are not only valid, when the observations are independent, but also when their probability law is arbitrary.
- b) At the end of the paper some theorems are developed in regard to the intimate relations between these questions and the probability laws that permit of an „exhaustive summary” (i.e. a generalised notion of „sufficient statistic”, defined by the writer).

He points out that if an exhaustive summary exists, it is possible, without any loss of precision, to restrict oneself to functions of the observations that only make use of this summary.

When there is no exhaustive summary there would always be loss of precision, if the number of variables were reduced. These last-mentioned results are valid in the case of independent observations only.
